Thais Leite

A Integral de Riemann-Stieltjes

Florianópolis
2017

Thais Leite

A Integral de Riemann-Stieltjes e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan

Florianópolis, Novembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

THAIS LEITE

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Matheus Cheque Bortolan.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Marianna Ravago

Prof.a Dr.a Marianna Ravara Vago
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Paulo Mendes de Carvalho Neto

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, 17 de novembro de 2017

Dedico esta monografia à todos que almejam por conhecimento e a minha avó Ortila que foi para perto de Deus antes mesmo de eu dar os meus primeiros passos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por aumentar minha fé a cada dia e por saber que tenho sempre o seu amor, aspectos que me fazem louvá-lo, perseverar, tentar e lutar todos os dias, pois "maior é o que está em nós do que o que está no mundo".

Agradeço ao apoio da Pró-reitoria de assuntos estudantis (PRAE) da univerdade, e do programa institucional de bolsa de iniciação à docência (PIBID), especialmente ao professor Nereu Estanislau Burin por todo apoio desde o meu primeiro momento como graduanda no curso de matemática e também como bolsista do PIBID.

Agradeço ao meu orientador, Matheus Cheque Bortolan, pela paciência, pela dedicação, pelo apoio e por acreditar em mim e assim podermos realizar essa monografia. Obrigada por contribuir tanto no meu crescimento acadêmico e até mesmo pessoal, pois não esqueço da seguinte frase: "nunca desista", a qual li ao ter aula pela primeira vez com o professor disciplina que consta em suas notas de aula disponibilizada aos alunos.

Agradeço a minha mãe por não ter desisto de mim, por acreditar mais em mim do que eu mesma, enfim, por todo apoio, companheirismo e dedicação desde do momento em que fui gerada. Mãe, só tenho a te agradecer, meu muito obrigada. E também é claro, agradeço a minha única e linda e tão amada por mim, minha irmã Tuany.

Agradeço àqueles da minha família que de alguma maneira me ajudaram e torceram por mim no decorrer desta caminhada, em especial, ao meu vô, " Zé do Leite", e ao meu padrinho Marcelo. Obrigada!

Agradeço ao meu amigo lindo Leandro Toldo de Souza pela paciência, pelo auxílio, pelo companheirismo, por me fazer tão bem e proporcionar e vivenciar comigo momentos importantes e regados de risadas, algo que ele não mede esforços para me proporcionar com intuito de me alegrar sempre, obrigada.

Agradeço também à todos os amigos que me ajudaram e me acompanharam significantemente nesta caminhada, principalmente àqueles do curso, obrigada pelas conversas, momentos de comilança e risadas, em especial ao Agnaldo Aroldo Pereira, a Paloma Brockveld e ao Tiago Coelho.

Agradeço à todos os professores que tive desde o primeiro momento como estudante, os quais despertaram e proporcionaram, muitas vezes, mais do que ensinamentos estudantis.

Resumo

Nesta monografia será apresentado o conceito da integral de Riemann-Stieltjes, que é uma generalização da integral de Riemann vista nos cursos básicos de Cálculo, suas principais propriedades e algumas de suas aplicações, como a desigualdade de Hölder. Também será apresentada brevemente uma aplicação da integral de Riemann-Stieltjes na caracterização do espaço dual das funções contínuas.

Palavras-chave: integral, Riemann-Stieltjes, desigualdade de Hölder.

Abstract

In this monography we present the concept of *Riemann-Stieltjes integral*, wich is a generalization of the Riemann integral seen in the basic Calculus courses, its main properties and some of its applications, such as the H "older of inequality. Also we briefly present an application of the Riemann-Stieltjes integral in the characterization of the dual function space continuous.

Keywords: integral, Riemann-Stieltjes, Hölder inequality.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Nesta monografia será apresentado o conceito da Integral de Riemann-Stieltjes, que teve seu surgimento em 1894 no trabalho [8], do matemático holandês Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) e aparece como uma das primeiras generalizações da Integral de Riemman, e também como uma das precursoras da Integral de Lebesgue.

A maior diferença entre a integral apresentada por Stieltjes com relação à de Riemann é que Stieltjes atribui diferentes "pesos" aos intervalos por meio de uma função monótona crescente α. Para Riemann, o peso de um intervalo $[c, d]$ é simplesmente o seu comprimento $d - c$; já para Stieltjes, se usada a função α, o peso do intervalo $[c, d]$ é $\alpha(d) - \alpha(c)$, cujo resultado pode ser muito maior (ou muito menor) do que o comprimento $d - c$. Os resultados se igualam quando $\alpha(x) = x$ para todo x, ou seja, $\displaystyle\int_c^d f(x)d\alpha(x) = \int_c^d f(x)dx$.

Este sistema de pesos permitiu a Stieltjes apresentar a primeira caracterização do espaço dual das funções reais contínuas definidas num intervalo $[a, b]$. Esta integral também tem outras aplicações, como por exemplo, na Teoria de Probabilidades, em funções de distribuição de probabilidade cumulativas.

Neste trabalho serão apresentados alguns resultados de Análise que serão necessários para a compreensão do trabalho, com o intuito de torná-lo o mais autocontido possível, a definição precisa da Integral de Riemann-Stieltjes, também chamada como Integral de Stieltjes, bem como resultados de caracterização de funções integráveis e as respectivas propriedades desta integral, com o objetivo final de encontrar uma caracterização para o espaço dual do espaço das funções contínuas por meio da Integral de Riemann-Stieltjes.

2 Contexto Histórico

Com o intuito de situar o leitor no contexto histórico, envolvendo a integral de Reimann-Stieltjes, será apresentado neste capítulo um breve relato cronológico disto, começando no século XVII, com surgimento do Cálculo e indo até início do século XX, donde será enfatizado a trajetória do Cálculo Diferencial e Integral, bem como os principais estudiosos destas áreas e suas contribuições, sendo que as referências principais para o embasamento disto são [1], [4] e [7].

Em meados do século XVII, haviam dois problemas centrais na matemática sendo discutidos:

- O cálculo da reta tangente sobre uma curva em qualquer um dos seus pontos.
- A área delimitada por esta curva (tida como base geométrica do cálculo atual) que foi estudada pelo astrônomo Arquimedes, por volta de 287 A.C., por meio do método de exaustão.

Entretanto, estes problemas foram solucionados na Europa por matemáticos de países como França, Inglaterra e Alemanha, refletindo em controvérsias quanto à autoria destas soluções, mas na literatura consta que os principais nomes apontados como solucionadores destes problemas foram: o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), o físico e matemático inglês Isaac Newton (1643-1727) e o matemático francês Pierre de Fermat (1607-1665) conhecidos até hoje como os "pais" do Cálculo.

Pierre de Fermat.

Figura 1 – Pierre de Fermat (1607-1665)

Fermat usou sua teoria de Geometria Analítica, em 1629, para encontrar os máximos e mínimos de curvas, além disso, encontrou retas tangentes à algumas curvas e também somas infinitas de áreas de retângulos inscritos para calcular áreas de curvas, dando o pontapé inicial no que hoje é conhecido como Integral de Riemann. Seu método, no entanto, era baseado em exemplos e não tinha a generalidade que uma teoria matemática necessita. Outra falha foi fazer perguntas algébricas com um olhar geométrico, ou seja, olhava tangentes e áreas como coisas distintas, não observando relação entre as mesmas.

Isaac Newton.

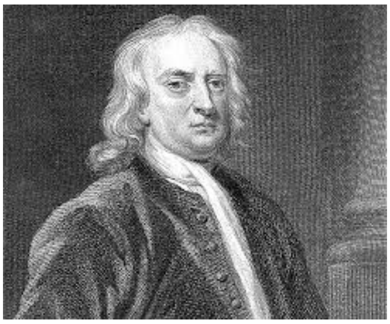


Figura 2 – Isaac Newton (1643-1727)

Newton, entre 1665 e 1666, provou o seu Teorema Binomial, relacionando-o aos problemas de áreas e tangentes, o qual fez em sua casa na cidade de Lincolnshire, situada na região leste da Inglaterra, pois o Trinity College foi fechado devido à peste bubônica.

Newton também percebeu como ir do problema de área ao de tangente e vice-versa após resolver o problema que consistia em descobrir a área abaixo da curva $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ no intervalo $[0, 1]$, conhecido atualmente como Teorema Fundamental do Cálculo, o qual tinha sido deixado sem solução pelo matemático britânico John Wallis (1616-1703).

Entretanto Newton não fez esforço para publicar seus resultados, mas a publicação da sua teoria de Cálculo saiu em 1687 no livro Philosophiae Naturalis Principia Mathematica - um dos mais admirados tratados cientícos de todos os tempos, onde se aplica Geometria ao estudo do Sistema Solar e a muitos outros temas da Matemática Aplicada - de sua autoria. Porém, devido à notação e conceitos complicados Newton não obteve êxito na exposição destes para seus contemporâneos, mas uma versão mais compreensível destas ideias foi apresentada por Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz criou independentemente, em 1675, um método para determinar a reta tangente à curva e percebeu a natureza inversa do problema de determinar tangentes e áreas abaixo de curvas. Leibniz considerou toda linha curva como um polígono com infinitos lados, infinitamente pequenos, o que deu origem à toda teoria dos diferenciais e integração como se conhece hoje. Suas notações são as que persistem até hoje, diferentemente das de Newton que não passavam as ideias de maneira muito intuitiva e fácil.

Figura 3 – Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Após as publicações dos trabalhos de Leibniz no jornal Acta Euditorum, inicou-se uma disputa entre Newton e Leibniz sobre quem teria inventado o Cálculo. Esta disputa levou a uma divisão entre os matemáticos ingleses e franceses, e até a proibição francesa do uso da notação $\frac{dy}{dx}$ adotada por Leibniz, que durou até a década de 1820. Porém, deve-se ressaltar que o Cálculo Diferencial e Integral como é conhecido hoje se deve pelo trabalho de vários outros estudiosos, como o filosófo e matemático francês Descartes (1596-1650), o teólogo e matemático inglês Barrow (1630-1677), o teólogo e matemático francês Pascal (1623-1662), dentre muitos outros.

O século XVIII foi de grandes evoluções e acrescentou muita teoria a tudo aquilo que Leibniz e Newton começaram, donde o físico e matemático suíço Euler (1707-1783) tornou o Cálculo Diferencial parte de um dos ramos mais gerais da Matemática, que se denomina atualmente como Análise.

Georg Friedrich Bernhard Riemann.

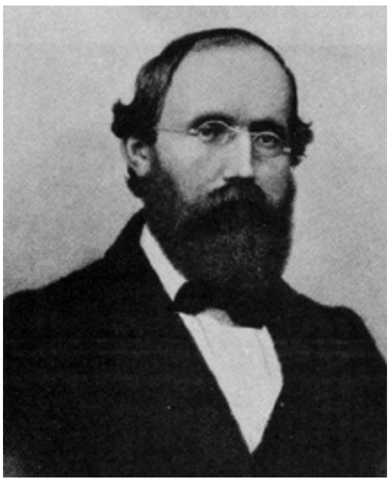


Figura 4 – Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

O início da Análise no século XIX se deu pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), juntamente ao seu compatriota Richard Dedekind (1831-1916), influenciados por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) na universidade de Göttingen. Quando Dirichlet faleceu em 1859, Riemann foi quem lhe sucedeu como professor.

Em Análise, Riemann é lembrado até hoje por seu papel no refinamento da definição de integral, pela ênfase que deu às hoje chamadas Equações de Cauchy-Riemann e pelas superfícies de Riemann. Entretanto, foi o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) o primeiro a fornecer uma definição moderna para a integral de Riemann.

A definição atual de integral definida, em termos de somas superiores e inferiores, é geralmente conhecida como integral de Riemann em honra ao homem que deu condições necessárias e suficientes para que uma função limitada fosse integrável. A função de Dirichlet[1], por exemplo, não tem integral de Riemann em intervalo algum.

Definições e teorias mais gerais sobre integração, ou condições mais fracas sobre as funções foram propostas no século seguinte a Riemann, mas a definição de integral usada até hoje em quase todos os cursos universitários de Cálculo se deve a ele, Riemann.

O século XX foi o momento da generalização do Cálculo, e nele tem destaque o matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875-1941) e o holandês Thomas Jan Stieltjes (1856-1894).

Thomas Jan Stieltjes.

Figura 5 – Thomas Jan Stieltjes (1856-1894)

Thomas Jan Stieltjes nasceu em 29 de dezembro de 1856 na cidade de Zwole, Holanda e morreu aos 38 anos na quarta maior cidade da França, Toulouse.

Stieltjes foi um dos pesquisadores que contribuiu para a generalização do Cálculo, iniciou seus estudos na Universidade Técnica de Delft (Holanda do Sul), em 1873, e passou seus anos de estudante lendo os livros do astrônomo e matemático alemão Johann Carl

[1] Definida por $f(x) = 0$ para x irracional e por $f(x) = 1$ para x racional.

Friedrich Gauss (1777-1855) e do também matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) ao invés de assistir as aulas e assim, acabou reprovado nos exames.

O pai de Thomas tinha como amigo o astrônomo H.G. van de Sande-Bakhuyzen (1838-1923), diretor do Observatório de Leiden, localizado na Holanda do Sul, o qual recomendou o filho para seu amigo, assim Stieltjes se tornou assistente no Observatório de Leiden em abril de 1877.

Em 1882, Stieltjes começou a escrever para o matemático francês Charles Hermite (1822-1901) sobre Mecânica Celeste, no entanto as escritas passaram a ser sobre matemática e assim Thomas começou a se dedicar aos conceitos relacionados a Matemática.

Em maio de 1883, Stieltjes se casou com Elizabeth Intveld, a qual lhe encorajou a mudar de Astronomia para a Matemática. Já em setembro, Stieltjes foi convidado para substituir um professor da Universidade de Delft que havia adoecido. Até dezembro 1883, ele lecionou sobre Geometria Analítica e Geometria Descritiva.

No ínicio do ano de 1884, Stieltjes pleiteou uma cadeira como professor em Groningen, donde há relatos de que a comissão que fazia as nomeações tinha elaborado uma lista com três nomes, em ordem de preferência, em 1883 em que no topo desta lista estava o matemático holandês Korteweg (1848-1941), e Stieltjes aparecia em segundo. Sendo assim, a cadeira foi oferecida a Korteweg, o qual depois de considerar a oferta decidiu que não queria deixar Amsterdã e assim a recusou. Nesta fase, o comitê de nomeação em Groningen elaborou uma nova lista, com Stieltjes em primeiro lugar, porém após um decreto Stieltjes foi descartado por não ter o grau acadêmico necessário.

Stieltjes foi com sua família para Paris em abril de 1885 e, neste mesmo ano, foi eleito membro da Academia Real de Ciências, em Amsterdã. Ele recebeu seu Doutorado em Ciências em 1886, com uma tese sobre Séries Assintóticas. Já no ano de 1889, Stieltjes foi nomeado para uma cadeira de Cálculo Diferencial na Universidade de Toulouse.

Stieltjes trabalhou em quase todos os ramos de Análise, Frações Contínuas e Teoria dos Números. Ele é frequentemente chamado de "o pai da Teoria Analítica das Frações Contínuas" por seu trabalho nesta área, que é visto como o primeiro passo para a Teoria dos Espaços de Hilbert. Também tem importantes trabalhos em séries divergentes e funções descontínuas, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, a função Gama, interpolação e funções elípticas.

3 Conceitos Preliminares

Com o intuito do leitor compreender efetivamente o conceito e os resultados da Integral de Riemann-Stieltjes, neste capítulo são apresentadas definições, propriedades e teoremas necessários para o estudo da Integral de Riemann-Stieltjes. Porém esse texto não é autossuficiente, donde, o leitor deve ter pelo menos um estudo anterior em Cálculo, especificamente dos assuntos anteriores a de Cálculo II, de acordo com o currículo (2008) do curso de Matemática-Licenciatura. Entretanto, constam também propriedades de ínfimo e de supremo ditas de grande imporância para conceber a monografia, porém exploradas de fato somente em fases posteriores a de Cálculo II.

Note que dado um subconjunto A não-vazio de $\mathbb{R}$, A é dito **limitado** se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ para todo $x \in A$, ou equivalentemente, se existe $\alpha \geqslant 0$ tal que $|x| \leqslant \alpha$ para todo $x \in A$.

Ainda, para um $A \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado, define-se o **supremo** de A como sendo o número $\beta \in \mathbb{R}$, denotado por $\beta = \sup(A)$, que satisfaz:

(i) $x \leqslant \beta$ para todo $x \in A$;

(ii) se $\gamma < \beta$ existe $x \in A$ tal que $\gamma < x$,

e o **ínfimo** de A como sendo o número $\alpha \in \mathbb{R}$, denotado por $\alpha = \inf(A)$, que satisfaz:

(i') $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in A$;

(ii') se $\alpha < \gamma$ existe $x \in A$ tal que $x < \gamma$.

Um número real satisfazendo (i) no lugar de β é chamado de **cota superior de** A, enquanto que satisfazendo (i') no lugar de α é chamado de **cota inferior de** A. As condições (ii) e (ii') garantem, respectivamente, que o supremo é a menor das cotas superiores de A e que o ínfimo é a maior das cotas inferiores de A.

Deve-se ressaltar que o ínfimo e o supremo têm caracterizações que são mais úteis para serem aplicadas, e serão vistas a seguir.

Caracterização do ínfimo: Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente. Então $d = \inf A$ se e somente se d é cota inferior de A e dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $x \in A$ tal que $d + \epsilon > x \geqslant d$.

De fato, suponha que $A \subset \mathbb{R}$ seja não-vazio e limitado inferiormente e $d = \inf A$. Assuma, por absurdo, que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in A$ se tem que $d + \epsilon \leqslant x < d$.

Mas como $d = \inf A$, então $d \leqslant x,\ \forall x \in A$, sendo assim $x < d \leqslant x,\ \forall x \in A$, donde segue que $x < x,\ \forall x \in A$, o que é um absurdo.

Logo, d é cota inferior de A e existe $x \in A$ tal que $d + \epsilon > x \geqslant d$.

Agora suponha que $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente, d é cota inferior de A e para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $d + \epsilon > x \geqslant d$. Será mostrado que $d = \inf A$. O que realmente ocorre, pois A admite ínfimo em $\mathbb{R}$, já que é um subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente e d é cota inferior de A, por hipótese.

Além disto, considere $a = d + \epsilon$ qualquer, em que a não é uma cota inferior de A, por hipótese. Sendo que se a for qualquer número maior do que d, então a não é uma cota inferior. Logo, como já foi argumentado que qualquer número maior do que d não pode ser uma cota inferior de A, segue-se que se a for outra cota inferior de A, então obrigatoriamente $a \leqslant d$, ou seja, $d = \inf A$.

Agora será provada a caracterização para o supremo.

Caracterização do supremo: Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. Então $c = \sup A$ se e somente se c é cota superior de A e dado $\epsilon > 0$ qualquer existe $y \in A$ tal que $c - \epsilon < y \leqslant c$.

De fato, suponha que $A \subset \mathbb{R}$ seja não-vazio e limitado superiormente e $c = \sup A$. Assuma, por absurdo, que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in A$ se tem que $c - \epsilon \geqslant y > c$. Mas como $c = \sup A$, então $c \geqslant y,\ \forall y \in A$, sendo assim $y > c \geqslant y,\ \forall y \in A$, donde segue que $y < y,\ \forall y \in A$, o que é um absurdo.

Logo, c é cota superior de A e existe $y \in A$ tal que $c - \epsilon < y \leqslant c$.

Agora suponha que $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente, c é cota superior de A e para todo $\epsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $c - \epsilon < y \leqslant c$. Será mostrado que $c = \sup A$. O que realmente ocorre, pois A admite supremo em $\mathbb{R}$, já que é um subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente e c é cota superior de A, por hipótese.

Além disto, considere $b = c - \epsilon$ qualquer, em que b não é uma cota superior de A, por hipótese. Sendo que se b for qualquer número menor do que c, então b não é uma cota superior. Logo, como já foi argumentado que qualquer número menor do que c não pode ser uma cota superior de A, segue-se que se b for outra cota superior de A, então obrigatoriamente $b \geqslant c$, ou seja, $c = \sup A$.

Constatando assim que isto serve como definição para ínfimo e supremo, respectivamente, de um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$.

Esta segunda definição será utilizada em várias demonstrações no decorrer desta monografia, pois facilita a prova de alguns resultados.

E ainda o conjunto $\mathbb{R}$ tem a *Propriedade do Supremo*, que garante que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado possui um supremo e um ínfimo (claramente, quando existem, o supremo e o ínfimo de um conjunto são únicos).

Proposição 3.1. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios, limitados e $A \subseteq B$. Então*

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

Demonstração: Por hipótese $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios, limitados e $A \subseteq B$. Pela Propriedade do Supremo, segue que A e B admitem supremo e ínfimo.

Seja $\inf(B) \in \mathbb{R}$. Pela definição de ínfimo, segue que:

$$\inf(B) \leqslant b, \text{ para todo } b \in B. \tag{3.1}$$

Porém, $A \subseteq B$, sendo assim $\inf(B) \leqslant a$, $\forall a \in A$, ou seja, $\inf(B)$ é uma cota inferior de A, donde disto, de (3.1) e de que $\inf(A)$ é a maior das cotas inferiores de A, obtêm-se:

$$\inf(B) \leqslant \inf(A). \tag{3.2}$$

Seja $\sup(B) \in \mathbb{R}$. Pela definição de supremo, segue que:

$$\sup(B) \geqslant s, \text{ para todo } s \in B. \tag{3.3}$$

Mas, $A \subseteq B$, sendo assim $\sup(B) \geqslant c$, $\forall c \in A$, ou seja, $\sup(B)$ é uma cota superior de A, donde disto, de (3.3) e de que $\sup(A)$ é a menor das cotas superiores de A, obtêm-se:

$$\sup(B) \geqslant \sup(A). \tag{3.4}$$

Da definição de ínfimo e de supremo do conjunto A, segue que:

$$\sup(A) \geqslant \inf(A). \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.2), (3.5) e (3.4), conclui-se que

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

■

Proposição 3.2. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios, limitados e*

$$A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}.$$

Então:

(i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(ii) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Demonstração: Agora será provado que os dois itens acima são válidos para quaisquer subconjuntos do conjunto dos números reais:

(i) Por hipótese $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados. Pela propriedade do supremo, segue que os conjuntos A, B admitem supremo, o qual é denotado por $\sup(A) \in \mathbb{R}$ e $\sup(B) \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Pela definição de supremo, tem-se que:

$$\sup(A) \geqslant x, \text{ para todo } x \in A \tag{3.6}$$

$$\sup(B) \geqslant y, \text{ para todo } y \in B. \tag{3.7}$$

Somando (3.6) e (3.7), obtém-se:

$$\sup(A) + \sup(B) \geqslant x + y,$$

ou seja, $\sup(A) + \sup(B)$ é uma cota superior do conjunto $A + B$, já que $x + y \in A + B$.

Agora será provado que $\sup(A) + \sup(B)$ é o supremo do conjunto $A + B$, o qual é denotado por $\sup(A + B)$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer, existe $z \in A$ e $w \in B$ tal que:

$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} < z \tag{3.8}$$

$$\sup(B) - \frac{\epsilon}{2} < w, \tag{3.9}$$

pela definição de supremo do conjunto A e B, respectivamente.

Sendo assim, ao somar (3.8) e (3.9), obtém-se:

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon < z + w,$$

isto é, $\sup(A) + \sup(B)$ é o supremo do conjunto $A + B$.

Portanto, $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$.

(ii) Por hipótese $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não-vazios e limitados. Pela propriedade do ínfimo, segue que os conjuntos A, B admitem ínfimo, o qual é denotado por $\inf(A) \in \mathbb{R}$ e $\inf(B) \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Pela definição de ínfimo, tem-se que:

$$\inf(A) \leqslant x, \text{ para todo } x \in A \tag{3.10}$$

$$\inf(B) \leqslant y, \text{ para todo } y \in B. \tag{3.11}$$

Somando (3.10) e (3.11) , obtém-se:

$$\inf(A) + \inf(B) \leqslant x + y,$$

ou seja, $\inf(A) + \inf(B)$ é uma cota inferior do conjunto $A + B$, já que $x + y \in A + B$.

Agora será provado que $\inf(A) + \inf(B)$ é o ínfimo do conjunto $A + B$, o qual é denotado por $\inf(A + B)$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer, existe $z \in A$ e $w \in B$ tal que:

$$\inf(A) + \frac{\epsilon}{2} > z \tag{3.12}$$

$$\inf(B) + \frac{\epsilon}{2} > w, \tag{3.13}$$

pela definição de ínfimo do conjunto A e B, respectivamente.

Sendo assim, ao somar (3.12) e (3.13), obtém-se:

$$\inf(A) + \inf(B) + \epsilon > z + w,$$

isto é, $\inf(A) + \inf(B)$ é o ínfimo do conjunto $A + B$.

Portanto, $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$. ■

Proposição 3.3. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio, limitado e $c \in \mathbb{R}$ tal que $cA = \{ca \colon a \in A\}$. Então:*

(i) $\sup(cA) = c \cdot \sup(A)$ *e* $\inf(cA) = c \cdot \inf(A)$*, se* $c \geqslant 0$;

(ii) $\sup(cA) = c \cdot \inf(A)$ *e* $\inf(cA) = c \cdot \sup(A)$*, se* $c < 0$.

Demonstração:

(i) Por hipótese $A \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Para demonstrar essa propriedade serão analisados dois casos ($c = 0$ e $c > 0$).

Se $c = 0$: O conjunto $cA = 0 \cdot A = \{0 \cdot a \ : \ a \in A\} = \{0\}$ é não-vazio e limitado, pois por hipótese $A \subseteq \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado. Sendo assim, pela propriedade do supremo, o conjunto $\{0\}$ admite supremo, o qual é denotado por $\sup(\{0\}) \in \mathbb{R}$ e $\sup(\{0\}) = 0$, já que $\{0\}$ é um conjunto unitário composto apenas pelo elemento zero, sendo assim o máximo do conjunto, neste caso 0, é igual ao supremo. Além do que, $c \cdot \sup(A) = 0 \cdot \sup(A) = 0$.

Logo, $c \cdot \sup(A) = 0 \cdot \sup(A) = 0 = \sup(\{0\}) = \sup(0 \cdot A) = \sup(cA)$.

Se $c > 0$: O conjunto $cA = \{ca\colon a \in A\}$ é não-vazio e limitado, pois $A \subseteq \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado, por hipótese.

Pela propriedade do supremo, o conjunto cA admite supremo, o qual é denotado por $\sup(cA) \in \mathbb{R}$.

Pela definição de supremo, tem-se que:

$$\sup(A) \geqslant x, \text{ para todo } x \in A. \tag{3.14}$$

Sendo assim, ao multiplicar (3.14) por $c > 0$, obtêm-se:

$$c \cdot \sup(A) \geqslant c \cdot x, \text{ para todo } x \in A,$$

donde como $x \in A$ é qualquer, segue que:

$$c \cdot \sup(A) \geqslant c \cdot x, \text{ para todo } cx \in cA,$$

ou seja, $c \cdot \sup(A)$ é cota superior de cA.

Agora será provado que $c \cdot \sup(A)$ é o supremo do conjunto cA, isto é, $c \cdot \sup(A) = \sup(cA)$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer, existe $z \in A$ tal que:

$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{c} < z, \tag{3.15}$$

pela definição de supremo do conjunto A.

Sendo assim, ao multiplicar $c > 0$ por (3.15), obtém-se:

$$c \cdot \sup(A) - \epsilon < c \cdot z,$$

isto é, $c \cdot \sup(A)$ é o supremo do conjunto cA.

Logo, $c \cdot \sup(A) = \sup(cA)$.

Argumentação análoga para o ínfimo.

Portanto, $\sup(cA) = c \cdot \sup(A)$ e $\inf(cA) = c \cdot \inf(A)$, se $c \geqslant 0$.

(ii) Por hipótese $A \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio e limitado, $c < 0$. Então o conjunto $cA = \{ca\colon a \in A\}$ é não-vazio e limitado.

Pela propriedade do ínfimo, o conjunto A admite ínfimo, denotado por $\inf(A) \in \mathbb{R}$. Pela propriedade do supremo, o conjunto cA admite supremo, o qual é denotado por $\sup(cA) \in \mathbb{R}$.

Pela definição de ínfimo, tem-se que:

$$\inf(A) \leqslant x, \text{ para todo } x \in A \tag{3.16}$$

Sendo assim, ao multiplicar $c < 0$ por (3.16), obtêm-se:

$$c \cdot \inf(A) \geqslant c \cdot x, \text{ para todo } x \in A$$

donde como $x \in A$ é qualquer, segue que:

$$c \cdot \inf(A) \geqslant c \cdot x, \text{ para todo } cx \in cA,$$

então $c \cdot \inf(A)$ é cota superior de cA.

Agora será provado que $c \cdot \inf(A)$ é o supremo do conjunto cA, ou seja, $\sup(cA) = c \cdot \inf(A)$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer, existe $w \in A$ tal que:

$$\inf(A) - \frac{\epsilon}{c} > w, \tag{3.17}$$

pela definição de ínfimo do conjunto A.

Sendo assim, ao multiplicar $c < 0$ por (3.17), obtém-se:

$$c \cdot \inf(A) - \epsilon < \underbrace{c \cdot w}_{\in cA},$$

logo $c \cdot \inf(A)$ é o supremo do conjunto cA. Portanto $\sup(cA) = c \cdot \inf(A)$.

Por fim, será mostrado que $c \cdot \sup(A)$ é o ínfimo do conjunto cA, ou seja, $\inf(cA) = c \cdot \sup(A)$.

Seja $\epsilon > 0$ qualquer, sendo assim, considere $-\frac{\epsilon}{c} > 0$ e existe $w \in A$ tal que:

$$\sup(A) + \frac{\epsilon}{c} < w, \tag{3.18}$$

pela definição de supremo do conjunto A. Sendo assim, ao multiplicar $c < 0$ por (3.18), obtém-se:

$$c \cdot \sup(A) - \epsilon > \underbrace{c \cdot w}_{\in cA},$$

logo $c \cdot \sup(A)$ é o ínfimo do conjunto cA. Portanto $\inf(cA) = c \cdot \sup(A)$. ∎

Proposição 3.4. *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais limitadas em $\mathbb{R}$. Então:*

(i) $\sup(f+g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$;

(ii) $\inf(f+g) \geqslant \inf(f) + \sup(g)$.

Demonstração:

(i) Sejam $A = \{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = f([a,b])$ e $B = \{g(x) \ : \ x \in [a,b]\} = g([a,b])$ o conjunto imagem da função f e g, respectivamente, os quais são conjuntos não-vazios e limitados, pois f, g são funções limitadas (ou seja, conjunto imagem da função f é limitado), por hipótese.

Considere $C = (f+g)([a,b]) = \{f(x) + g(x) \ : \ x \in [a,b]\}$ o conjunto composto pela soma dos elementos dos conjuntos imagem A e B, tal que $C = (f+g)([a,b]) = \{f(x) + g(x) \ : \ x \in [a,b]\} \subset A + B$ é não-vazio e limitado, pois os conjuntos A e B são limitados, por hipótese.

Pelas Propriedades 3.1 e 3.2, segue que

$$\sup(C) \leqslant \sup(A+B) \ \Rightarrow \ \sup(C) \leqslant \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Donde,

$$\sup(C) = \sup(f+g) \leqslant \sup(A) + \sup(B) = \sup(f) + \sup(g).$$

Logo, $\sup(f+g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$.

(ii) A demonstração é análoga à do item anterior. ■

As três definições a seguir são essenciais para a compreensão do Teorema 3.14, o qual é de relevante importância em algumas demonstrações que constam no decorrer dessa monografia.

Para apresentá-las, serão expostos alguns conceitos (que podem ser vistos em mais profundidade em [2]. Seja M um conjunto qualquer não-vazio. Uma função $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ é chamada de **métrica** se satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $d(x,y) \geqslant 0$ para todos $x, y \in M$;

(b) $d(x,y) = 0$ se e só se $x = y$;

(c) $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in M$;

(d) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ para todos $x, y, z \in M$.

A propriedade (d) é comumente chamada de *desigualdade triangular*. O par (M, d) é chamado de **espaço métrico**.

Observação 3.5. *Em* $\mathbb{R}$ *será considerado a métrica usual, que é definida por* $d(x,y) = |x-y|$, *para* $x, y \in \mathbb{R}$.

Além disto, num espaço métrico, dado $x \in M$ e $r > 0$, define-se a **bola aberta de centro** x **e raio** r por

$$B_r(x) = \{y \in M : d(y,x) < r\}.$$

Seja A um subconjunto de M. Um ponto $x \in A$ é dito ser um **ponto interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Um subconjunto A de M é dito **aberto** se todos os seus pontos são interiores (define-se também que o conjunto vazio é aberto).

Um subconjunto A de M é dito **fechado** se o seu complementar em M é aberto.

Definição 3.6. *Seja* (M,d) *um espaço métrico,* $A \subseteq M$ *e* I *um conjunto qualquer de índices. A família* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *é dita ser uma* ***cobertura aberta*** *de* A, *se* C_α *é um conjunto aberto para todo* $\alpha \in I$ *e* $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$.

Exemplo 3.7. *Considere a métrica usual em* $\mathbb{R}$ *e o conjunto* $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. *Será mostrado que* $C_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$ *e* $C_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right)$ *compõem uma cobertura aberta de* A. *De fato, pois* $A \subseteq C_1 \cup C_2 \cup C_3$, *e cada* C_i $(i \in \{1,2,3\})$ *em* $\mathbb{R}$ *é um intervalo aberto, ou seja, é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}$. *Assim, conclui-se, pela Definição 3.6 que* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\{1,2,3\}} = \{C_1, C_2, C_3\}$ *é uma cobertura aberta de* A.

Também é uma cobertura de A *a família* $C_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ *para inteiros positivos* n, *porém não é uma cobertura aberta, pois neste caso os intervalos são fechados em* $\mathbb{R}$.

Se $B = (0,1)$, *a família* $C_n = (\frac{1}{n}, 1)$ *para* $n \geqslant 1$ *é uma cobertura aberta de* B.

Definição 3.8. *Seja* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *uma cobertura de* A, *em que se* $I' \subseteq I$ *é um conjunto finito, diz-se que* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I'}$ *é* ***subcobertura finita*** *de* A.

O conjunto B *do Exemplo 3.7 não possui nenhuma subcobertura finita. Entretanto o conjunto* $A = [0,1]$ *possui subcobertura finita, como se pode constatar no exemplo a seguir.*

Exemplo 3.9. *Considere a métrica usual em* $\mathbb{R}$. *Sejam* $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $C_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$, $C_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right)$ *e* $\{C_\alpha\} = \{C_1, C_2, C_3\}$ *uma cobertura de abertos de* A *em que* $A \subseteq C_1 \cup C_2 \subseteq C_1 \cup C_2 \cup C_3$, *donde* $\{C_1, C_2\}$ *é uma subcobertura finita da cobertura de abertos* $\{C_\alpha\}$ *de* A.

Definição 3.10. *Sejam* (M,d) *espaço métrico e* $K \subseteq M$. *O conjunto* K *é* ***compacto*** *se para qualquer cobertura aberta* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de* K *se tiver uma subcobertura finita.*

Exemplo 3.11. *O conjunto* B *do Exemplo 3.7 não é compacto, pois existe uma cobertura de* B *que não possui subcobertura finita, como argumentado acima.*

Exemplo 3.12. *Considere a métrica usual em* $\mathbb{R}$. *Um conjunto finito qualquer* $A = \{1, 2, 3, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}$, *é compacto. De fato, tome* $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma cobertura aberta qualquer de* A.

Então:

$$\begin{aligned} &\textit{existe } C_{\alpha_1} \textit{ tal que } 1 \in C_{\alpha_1}, \\ &\textit{existe } C_{\alpha_2} \textit{ tal que } 2 \in C_{\alpha_2}, \\ &\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\textit{existe } C_{\alpha_p} \textit{ tal que } p \in C_{\alpha_p}. \end{aligned}$$

Segue que $A \subseteq C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup \ldots \cup C_{\alpha_p}$, *ou seja,* $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *tem uma subcobertura finita para* A, *pela Definição 3.8. Logo,* A *é compacto, pela Definição 3.10.*

O mais importante teorema sobre compacidade em espaços euclidianos é o seguinte:

Teorema 3.13. (Teorema de Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Ver demonstração em [6, Teorema 2.41]. ■

O próximo teorema e o Teorema 3.13 serão utilizados em diversas demonstrações, especificamente naquelas em que se tem o fato da continuidade de determinada função.

Antes de enunciá-lo e demonstrá-lo, lembre-se de alguns conceitos. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos e $f\colon M \to N$ uma função. Se diz que f é **contínua num ponto** $x \in M$, se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d_M(x, y) < \delta$ então $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Se f é contínua em todos os pontos de M se diz simplesmente que f é **contínua**.

Será dito que a função f é **uniformemente contínua** se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que para quaisquer $x, y \in M$ com $d_M(x, y) < \delta$ tem que $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Note aqui a diferença entre *continuidade* e *continuidade uniforme*. Na continuidade, δ depende tanto de ϵ quanto do ponto x fixado. Já na continuidade uniforme, δ só depende de ϵ, e funciona para qualquer ponto x.

Claramente, toda função uniformemente contínua é contínua, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Mas, em alguns casos específicos, como se verá no teorema a seguir, a recíproca se torna válida.

Teorema 3.14. Seja (M, d_M) espaço métrico,(N, d_N) um espaço métrico, $K \subset M$ compacto e $f : M \longrightarrow N$ função contínua. Então a função f é uniformemente contínua em M.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ qualquer e $p \in K$. A função f é contínua, ou seja, f é contínua em p para todo $p \in K$, pela definição. Assim, para cada $p \in K$, existe $\delta_p \in \mathbb{R}$ com $\delta_p > 0$ tal que para qualquer $x \in K$, se $d_M(x,p) < \delta_p$ então $d_N(f(x), f(p)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Para cada $p \in K$ considere $C_p = \left\{x \in K \ : \ d(x,p) < \frac{\delta_p}{2}\right\} = B_{\delta_p/2}(p)$, e pelo fato de que M é compacto, segue que

$$X \subseteq C_{p_1} \cup C_{p_2} \cup \cdots \cup C_{p_n}.$$

Tome $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{p_1}}{2}, \frac{\delta_{p_2}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{p_n}}{2}\right\} > 0$, pois cada $\delta_{p_i} > 0$ com $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sejam $a, b \in K$ quaisquer tais que $d_M(a,b) < \delta$, logo existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in C_{p_j}$. Então $d_K(a, p_j) < \frac{\delta_{p_j}}{2}$. Pela desigualdade triangular, segue que

$$d(b,p_j) \leqslant d(b,a) + d(a,p_j) < \delta + \frac{\delta_{p_j}}{2} \leqslant \frac{\delta_{p_j}}{2} + \frac{\delta_{p_j}}{2} = \delta_{p_j}$$

Como a função f é contínua no ponto $p_j \in K$ e $a, b \in K$ tais que:

$$d_K(a,p_j) < \frac{\delta_{p_j}}{2} < \delta_{p_j} \qquad e \qquad d_K(b,p_j) < \delta_{p_j}$$

Logo,

$$d_N\left(f(a), f(p_j)\right) < \frac{\epsilon}{2} \qquad e \qquad d_N(f(b), f(p_j)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sendo assim pelas propriedades de métrica, segue que:

$$d_N\left(f(a), f(b)\right) \leqslant d_N\left(f(a), f(p_j)\right) + d_N\left(f(p_j), f(b)\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, a função f é uniformemente contínua. ∎

4 Integral de Riemann-Stieltjes

A integral de Riemann-Stieltjes surgiu com o intuito de suprir carências da integral de Riemann em relação, principalmente, à aplicações. Stieltjes passou a considerar pesos na hora de aplicar a integração. Na integral usual de Riemman, o peso de cada intervalo é o simplesmente o seu tamanho. Já para Stieltjes, cada subintervalo ganha um peso diferente, utilizando uma função real monótona crescente α. Entretanto alguns resultados da integral de Stiletjes podem ser reduzidos ao da integral de Riemann, mas há resultados na Teoria de Probabilidade ou na Análise Funcional, por exemplo, que são facilmente verificados a partir de resultados válidos para a integral de Riemann-Stieltjes. Deve-se ressaltar que existem muitas generalizações do conceito de integração, como por exemplo, a integral de Lebesgue, Henstock-Kurzweil, dentre outras.

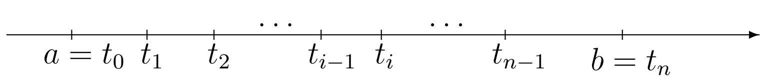
A integral de Riemann-Stieltjes será apresentada nesse capítulo, donde poderá se constatar de que esta é uma generalização da integral de Riemann. Posteriormente terão seções com resultados referentes a integral de Riemann-Stieltjes, os quais valem para todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ (adequando, por exemplo, o conceito de distância neste espaço métrico em relação a $\mathbb{R}$), entretanto no decorrer dessa monografia a teoria será exibida apenas com os intervalos fechados e limitados de números reais, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, além disso, toda função f que aparece é uma função limitada de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$.

Para definir a integral de Riemann-Stieltjes é preciso saber o conceito de integral inferior e superior, o qual depende de outros que estão relacionados à partição de um intervalo, soma superior e inferior de uma função real limitada f. Sendo assim, a seguir serão apresentadas estas definições pertinentes da teoria de integral de Riemann-Stieltjes.

Definição 4.1. *Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Uma **partição** ou **divisão** de $[a,b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$ tal que*

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,$$

Uma partição P de $[a,b]$ divide este intervalo em n intervalos como exemplificado abaixo:



Como se pode observar na definição acima os pontos extremos do intervalo particionado são elementos da partição sempre e as divisões não necessariamente são de tamanhos iguais.

Além disto, considere o conjunto Ω formado por todas as partições do intervalo $[a, b]$, ou seja, $\Omega = \{P\colon P$ é partição de $[a, b]\}$.

Uma função $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ será dita **monótona crescente** (ou simplesmente, **crescente**) se dados $a \leqslant x < y \leqslant b$ se obtem que $\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$.

Definição 4.2. *Seja α uma função monótona crescente em $[a, b]$. Para cada partição $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a, b]$, escreve-se*

$$\Delta\alpha_i = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \text{ para } i = 1, \cdots, n.$$

Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer e P uma partição de $[a, b]$ qualquer. Define-se:

$$m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

é o ínfimo do conjunto imagem da função f restrita ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, e

$$M_i = \sup\{f(x)\colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

é o supremo do conjunto imagem de f restrita ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

*Então a **soma inferior** de f para P com relação a α é definida por*

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_{\alpha_i},$$

*e a **soma superior** de f para P com relação a α é definida por*

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_{\alpha_i}.$$

O caso em que $\alpha(b) = \alpha(a)$, ou seja, função α constante, pouco serve para o estudo da integral de Riemann-Stieltjes de uma função f real limitada e definida em um intervalo $[a, b]$. Note que neste caso o peso de qualquer intervalo com respeito à função α é zero.

A função α é limitada em $\mathbb{R}$, pois α é uma função monótona crescente e $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}$, isto é, $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são os extremos do conjunto imagem da função α.

Deve-se ressaltar que $\Delta\alpha_i \geqslant 0$, já que a função α é monótona crescente e também, que, m_i e M_i somente existem devido a hipótese de que a função f é limitada em $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto imagem $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$, afirmação que é garantida pela *Propriedade do Supremo*.

Além disso, segue da definição de ínfimo e supremo que $m \leqslant f(x) \leqslant M,$ para todo $x \in [a, b]$, em que $m = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}$ e $M = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}$. Com isto e com a Propriedade 3.1, tem-se a seguinte desigualdade

$$m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M. \tag{4.1}$$

Fique atento, pois não se pode trocar inf (ínfimo) por **min** (mínimo) e nem sup (supremo) por **max** (máximo), a menos que se assuma que a função f é contínua e assim, pelo Teorema de Weierstrass a função admite mínimo e máximo, isto é, são valores efetivamente assumidos por f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Entretanto, a função f pode não ter valor mínimo e nem máximo.

Já da Definição 4.2, de α uma função real crescente e do ínfimo ser menor ou igual do que o supremo em um conjunto qualquer, segue que,

$$L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha), \tag{4.2}$$

e além disso se tem

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)] \tag{4.3}$$

que decorre da definição de ínfimo e de supremo, de (4.2) e também das duas desigualdades abaixo:

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] = m \sum_{i=1}^{n} \Delta_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} m\Delta_{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_{\alpha_i} = U(P, f, \alpha) \tag{4.4}$$

e

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\Delta_{\alpha_i} = M \sum_{i=1}^{n} \Delta_{\alpha_i} = M[\alpha(b) - \alpha(a)], \tag{4.5}$$

onde se usa (4.1)

Considere o conjunto das somas inferiores e também o das somas superiores referentes a todas as partições de $[a, b]$. De (4.4), tem-se que o número real $m[\alpha(b) - \alpha(a)]$ é uma cota inferior do conjunto formado pelas somas superiores, ou seja, é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Logo, pela propriedade de ínfimo, o conjunto das somas superiores admite ínfimo, isto é, $\inf\{U(P, f, \alpha) \colon \text{ P é partição qualquer de } [a, b]\} \in \mathbb{R}$. O raciocínio é análogo para o conjunto das somas inferiores, mas agora usando (4.5) e a propriedade de supremo, garantindo a existência do supremo deste conjunto, ou seja, $\sup\{L(P, f, \alpha) \colon \text{ P é partição qualquer de } [a, b]\} \in \mathbb{R}$.

Com estas afirmações, há condições de definir integral inferior e superior:

Definição 4.3. *A **integral inferior** da função real limitada f em $[a, b]$ com relação a α é dada por*

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\left\{L(P, f, \alpha) \colon P \textit{ é partição qualquer de } [a, b]\right\}$$

*e a **integral superior** da função real limitada f em $[a, b]$ com relação a α é dada por*

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\left\{U(P, f, \alpha) \colon P \textit{ é partição qualquer de } [a, b]\right\}.$$

A integral inferior e superior com relação a α, de uma função real limitada f, não são necessariamente iguais. Caso elas sejam, então se diz que a função f é Stieltjes integrável com relação a α, próxima definição.

Definição 4.4. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Em que f é dita* ***Stieltjes integrável em*** *$[a,b]$* ***com respeito à*** *α se*

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

O valor comum da igualdade acima é denotado por $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$ e este valor é chamado de integral de Stieltjes de f com respeito à α, ou simplesmente, ***integral de Stieltjes*** *de f com respeito a α, em $[a,b]$.*

Denota-se por $\Re(\alpha)$ o conjunto formado por todas as funções a valores reais, limitadas definidas no intervalo $[a,b]$ que são Stieltjes integráveis em relação a função real crescente α, ou seja,

$$\Re(\alpha) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon f \text{ é limitada}$$
$$\text{e Stieltjes integrável em } [a,b],\ \text{com respeito à } \alpha\}.$$

Da Definição 4.4, tem-se que se $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(x) = x$, para todo $x \in [a,b]$, segue que a integral de Stieltjes, relativamente à função α, coincide com a integral de Riemann, ou seja, $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)d(x)$, pois se tem: $\Delta_{\alpha_i} = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta_{x_i}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Para maior compreensão da definição de integral de Stieltjes será exibido um exemplo a seguir.

Exemplo 4.5. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real constante $f(x) = c,$ para todo $x \in [a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função crescente $\alpha(x) = 2x + 1,$ para todo $x \in [a,b]$. O objetivo é mostrar que $f \in \Re(\alpha)$ e determinar o valor de sua integral $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$.*

Para isto, considere uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ qualquer de $[a,b]$. Em que $m_i = M_i = c,$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de acordo com a Definição 4.2, sendo assim,

$$\begin{aligned} L(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_{\alpha_i} = U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta_{\alpha_i} \\ &= c[\alpha(t_1) - \alpha(a)] + c[\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \cdots + c[\alpha(t_{n-1}) - \alpha(t_{n-2}] + c[\alpha(b) - \alpha(t_{n-1})] \\ &= c[\alpha(b) - \alpha(a)] = c[(2b+1) - (2a+1)] = c(2b - 2a). \end{aligned}$$

Como $L(P,f,\alpha) = U(P,f,\alpha) = c(2b-2a)$, segue que o ínfimo e o supremo desta igualdade são iguais, pela definição de ínfimo e supremo, sendo assim, pela Definição 4.3, segue que:

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} c\ d(2x+1) = c(2b-2a) = \overline{\int_a^b} c\ d(2x+1),$$

donde, pela Definição 4.4, obtem-se que $f \in \Re(\alpha)$ e

$$\int_a^b c\ d(2x+1) = c(2b-2a).$$

Deste exemplo, considerando a função crescente α qualquer, conclui-se que toda função constante real é Stieltjes integrável, já que $c \in \mathbb{R}$ é qualquer.

Definição 4.6. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Stieltjes integrável em $[a,b]$. Então*

$$\int_b^a f d\alpha = -\int_a^b f d\alpha.$$

Definição 4.7. *Sejam P e Q partições de $[a,b]$, em que Q é um* ***refinamento*** *de P se $P \subset Q$, ou seja, todo ponto da partição P é um ponto da partição Q.*

E agora, como refinar uma partição? Comece acrescentando um único ponto na partição. Esta é a maneira mais simples de começar, e isto será usado de maneira significativa em algumas demonstrações.

Definição 4.8. *Se P e Q são duas partições, com $P \subset Q$, diz-se que Q é um* ***refinamento*** *de P. Se P_1 e P_2 partições de $[a,b]$, a partição $Q = P_1 \cup P_2$ é denominada* ***refinamento comum*** *das partições P_1 e P_2 (já que Q é um refinamento de P_1 e P_2).*

Exemplo 4.9. *Considere o intervalo $[a,b] = [0,1]$. Então $P = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right\}$ e $Q = P \cup \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, 1\right\}$ são duas partições de $[0,1]$. Observe que a partição Q é um refinamento da partição P, ou seja, Q tem todos os pontos de P e mais alguns. De fato, pela definição de união de conjuntos e pelo fato dos extremos do intervalo pertencerem obrigatoriamente a partição, segue que $P \subseteq Q$.*

4.1 Critérios de Integrabilidade

Nesta seção o objetivo é buscar condições necessárias para se garantir a integrabilidade de uma função f, mesmo que não se seja capaz de dizer qual é o valor de sua integral. Para isto, se começará com alguns resultados.

Teorema 4.10. Seja Q um refinamento de P, então

$$L(P,f,\alpha) \leqslant L(Q,f,\alpha) \tag{4.6}$$

e

$$U(P, f, \alpha) \geqslant U(Q, f, \alpha). \tag{4.7}$$

Demonstração: O caso $Q = P$ não há nada o que provar. Assuma então que Q é um refinamento de P e existe pelo menos um ponto em Q que não está em P. Assumimos primeiramente, que Q tem um único ponto a mais do que P. Denotando por r este ponto adicional, tem-se $Q = P \cup \{r\}$ e considere que $t_{i-1} < r < t_i$, isto é, $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ e $Q = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < r < t_i < \cdots < t_n = b\}$.

Sejam $m' = \inf\{f(x) \ : \ x \in [t_{i-1}, r]\}$ e $m'' = \inf\{f(x) \ : \ x \in [r, t_i]\}$, sendo que $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$. Disto e da Propriedade 3.1, $m_i \leqslant m'$ e $m_i \leqslant m''$ (m_i da Definição 4.2).

Logo, pela Definição 4.2 e pelo fato da função α ser crescente, segue que:

$$\begin{aligned} L(Q, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= m'[\alpha(r) - \alpha(t_{i-1})] + m''[\alpha(t_i) - \alpha(r)] - m_i[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \\ &= [m' - m_i][\alpha(r) - \alpha(t_{i-1})] + [m'' - m_i][\alpha(t_i) - \alpha(r)] \geqslant 0, \end{aligned}$$

ou seja $L(Q, f, \alpha) \geqslant L(P, f, \alpha)$.

Se Q contém k pontos a mais do que P, repete-se então esse raciocínio k vezes, em outras palavras, o caso geral resulta após repetir o argumento acima um número finito de vezes. Portanto, a primeira desigualdade é válida para qualquer partição Q que é um refinamento da partição P.

Mostra-se, de maneira análoga, a segunda desigualdade. Sejam $M' = \sup\{f(x) \ : \ x \in [t_{i-1}, r]\}$ e $M'' = \sup\{f(x) \ : \ x \in [r, t_i]\}$, sendo que $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, logo disto e da Propriedade 3.1, $M_i \geqslant M'$ e $M_i \geqslant M''$ (M_i da Definição 4.2). Logo, pela Definição 4.2 e pelo fato da função α crescente, segue que:

$$\begin{aligned} U(Q, f, \alpha) - U(P, f, \alpha) &= M'[\alpha(r) - \alpha(t_{i-1})] + M''[\alpha(t_i) - \alpha(r)] - M_i[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \\ &= [M' - M_i][\alpha(r) - \alpha(t_{i-1})] + [M'' - M_i][\alpha(t_i) - \alpha(r)] \leqslant 0, \end{aligned}$$

ou seja $U(Q, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha)$.

Se Q contém k pontos a mais do que P, repete-se então esse raciocínio k vezes, em outras palavras, o caso geral resulta após repetir o argumento acima um número finito de vezes. Portanto, a segunda desigualdade é válida para qualquer partição Q que é um refinamento da partição P. ∎

Com este último teorema se pode perceber que refinando-se uma partição a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Corolário 4.11. *Sejam P, Q partições quaisquer de $[a, b]$ então $L(P, f, \alpha) \leqslant U(Q, f, \alpha)$.*

Demonstração: Considere a patição $P \cup Q$. Sendo que $P \subset (P \cup Q)$ e $Q \subset (P \cup Q)$. Logo, $(P \cup Q)$ é um refinamento comum de P e Q. Pelo Teorema 4.10, segue que:

$$L(P, f, \alpha) \leqslant L(P \cup Q, f, \alpha) \leqslant U(P \cup Q, f, \alpha) \leqslant U(Q, f, \alpha),$$

e prova o resultado. ∎

Teorema 4.12. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real limitada em $[a, b]$. Então

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

Demonstração: Sejam $P_1,\ P_2$ partições de $[a, b]$ e Q o refinamento comum destas duas partições. Pelo Teorema 4.10 e pela Propriedade 3.1, segue que:

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant L(Q, f, \alpha) \leqslant U(Q, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha). \tag{4.8}$$

Ou seja,

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Considere A o conjunto das somas inferiores de f, sendo assim $U(P_2, f, \alpha)$ é uma cota superior de A, donde o conjunto A admite supremo, pela propriedade do supremo. Além disso, pela definição de supremo, tem-se que:

$$\sup_{P_1 \in \Omega} L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Da última desigualdade acima, segue que o $\sup_{P_1 \in \Omega} L(P_1, f, \alpha)$ é uma cota inferior do conjunto formado pelas somas superiores de f em relação a partição P_2. Logo, existe o $\inf U(P_2, f, \alpha)$, pela propriedade do ínfimo. Portanto, pela definição de ínfimo,

$$\sup_{P_1 \in \Omega} L(P_1, f, \alpha) \leqslant \inf_{P_2 \in \Omega} U(P_2, f, \alpha),$$

assim conclui-se, pela Definição 4.3 que

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

Teorema 4.13. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real limitada em $\mathbb{R}$, de modo que $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

Demonstração: Suponha primeiramente que $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} d\alpha.$$

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existem partições P_1, P_2 de $[a,b]$ tais que:

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) \leqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha$$

e

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} > U(P_2, f, \alpha) \geqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

pela definição de ínfimo e supremo, respectivamente, e pela Definição 4.2.

Seja P um refinamento comum de P_1 e P_2, isto é, $P = P_1 \cup P_2$ e assim, pelo Teorema 4.10,

$$L(P, f, \alpha) \geqslant L(P_1, f, \alpha) \Rightarrow -L(P, f, \alpha) \leqslant -L(P_1, f, \alpha)$$

e

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha).$$

Logo,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) - L(P_1, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

e portanto, $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$.

Reciprocamente, suponha que dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$.

Para cada partição P, tem-se:

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha),$$

pela definição e propriedade de supremo e de ínfimo e, pelo Teorema 4.12. Disto e da hipótese de que $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$, obtem-se:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se que:

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha = 0.$$

Logo,

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha,$$

pela Definição 4.4, conclui-se que $f \in \Re(\alpha)$. ∎

Este último teorema é de relevante importância ao que se refere a critério de integrabilidade, já que em algumas situações, as quais se deseja mostrar que a função é Riemann-Stieltjes integrável, basta provar que a diferença entre soma superior e soma inferior é arbitrariamente pequena, pois do teorema se tem que uma função f real limitada em $\mathbb{R}$ é Riemann-Stieltjes integrável se e, somente se, existe uma partição P tal que a diferença entre soma superior e soma inferior seja arbitrariamente pequena.

Entretanto, vale notar que este é um critério altamente teórico, e de difícil aplicação prática, pois geralmente não é fácil determinar a existência da partição, além de não fornecer uma maneira de se calcular o valor da integral $\int_a^b f d\alpha$.

Nos dois exemplos a seguir poderá se observar uma situação (Exemplo 4.15) que ocorre na integral de Riemann, mas que em geral não vale na integral de Stieltjes, além disto se constatará, como já mencionado, a importância do Teorema 4.13 para determinar a integrabilidade da função em relação à integral de Riemann-Stieltjes, e no Exemplo 4.14, a contribuição deste teorema para determinar o valor da integral de Stieltjes.

Exemplo 4.14. *Suponha uma função real crescente $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e contínua para algum $x_0 \in [a, b]$ Além disso, seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x_0) = 1$ e $f(x) = 0$, se $x \neq x_0$. Então $f \in \Re(\alpha)$ e $\int_a^b f d\alpha = 0$.*

Para demonstrar estas duas afirmações, considere $\epsilon > 0$ qualquer e $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$. Sem perda de generalidade, tome $a = t_0 = x_0$. Observe que:

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_{\alpha_i} &= M_1[\alpha(t_1) - \alpha(t_0)] + M_2[\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \ldots + M_n[\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})] \\ &= 1[\alpha(t_1) - \alpha(x_0)] + 0[\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \ldots + 0[\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})] \\ &= \alpha(t_1) - \alpha(x_0) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_{\alpha_i} &= m_1[\alpha(t_1) - \alpha(t_0)] + m_2[\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \ldots + m_n[\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})] \\ &= 0[\alpha(t_1) - \alpha(x_0)] + 0[\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \ldots + 0[\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Disto e da hipótese da função α ser crescente e contínua, obtem-se:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = [\alpha(t_1) - \alpha(x_0)] - 0 = \alpha(t_1) - \alpha(x_0) = |\alpha(t_1) - \alpha(x_0)| < \epsilon \quad (4.9)$$

e logo, pelo Teorema 4.13, $f \in \Re(\alpha)$.

Agora, basta mostrar que $\int f(x)d\alpha(x) = 0$. Da Definição 4.3 e da definição de supremo e de ínfimo, segue que

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha),$$

destas desigualdades e da (4.9), segue que:

$$-\epsilon < 0 = L(P, f, \alpha) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) < \epsilon$$

e como ϵ é arbitrário, obtem-se que $\int f(x)d\alpha(x) = 0$, isto vale para qualquer partição P de $[a, b]$ como mencionado no ínicio desta demonstração. Portanto,

$$f \in \Re(\alpha) \text{ e } \int_a^b f d\alpha = 0.$$

Será feito um contra-ponto a este último exemplo, relembrando um resultado bastante conhecido para a integral de Riemann.

Exemplo 4.15. *Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, e $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Então $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.*

Para mostrar isto, será feito o seguinte: suponha, por absurdo, que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Disto e da hipótese, segue que $f(x_0) > 0$, assim $\frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Além disso, por hipótese, f é uma função contínua em $[a, b]$, então considere $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Donde, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$, quando para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ se tem que $|x - x_0| < \delta$. E mais, note que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \subseteq [a, b]$.

Logo, pela hipótese de $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, pelas Definições 4.4 e 4.3 (restritas a integral de Riemann), pela Propriedade 3.1, pela hipótese de $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, pela hipótese de f contínua e pelo fato do tamanho γ do intervalo $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ ser positivo obtem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_J f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \cdot \gamma > 0,$$

o que contradiz a hipótese de que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Note que olhando os dois exemplos, se vê que o resultado do Exemplo 4.15 não é válido em geral para integrais de Riemann-Stietljes, como mostra o Exemplo 4.14.

4.2 A integral como limite de somas de Riemann

Agora, será mostrado que a integral de Riemann-Stieltjes pode ser considerada como limite de uma sucessão de somas, nas quais M_i e m_i são "substituídos" por valores de f, ou seja, definir a integral de Riemann-Stieltjes de maneira que não use conceito nem de ínfimo e nem de supremo. Como anteriormente, α é uma função monótona crescente em $[a,b]$ e f uma função real limitada em $[a,b]$. Mas antes de introduzir esta definição serão apresentados alguns resultados.

Se $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ é uma partição de $[a,b]$, escolha $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Os pontos v_i são chamados de **marcas**. A partição P juntamente com um conjunto de marcas é chamada de **partição marcada** de $[a,b]$. Dada uma partição marcada P de $[a,b]$, $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente em $[a,b]$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, define-se

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i},$$

e $S(P,f,\alpha)$ será chamada de **soma de Riemann de f na partição marcada P com respeito à** α.

Além disso, para uma partição $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$, define-se a **norma** ou **amplitude máxima** de P por

$$\Delta P = \max_{i=1,\cdots,n} (t_i - t_{i-1}).$$

Definição 4.16. *Uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **Riemann-Stieltjes integrável**, se existe*

$$\lim_{\Delta P \to 0} S(P,f,\alpha) = I \in \mathbb{R}.$$

Com este limite, se quer dizer que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|S(P,f,\alpha) - I| < \epsilon,$$

para toda partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ com $\Delta P < \delta$ e para qualquer escolha de marcas $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ em P.

Teorema 4.17. Se $\lim_{\Delta P \to 0} S(P,f,\alpha)$ existe então $f \in \Re(\alpha)$ e

$$\lim_{\Delta P \to 0} S(P,f,\alpha) = \int_a^b f d\alpha. \tag{4.10}$$

Demonstração: Suponha $\lim_{\Delta P \to 0} S(P,f,\alpha) = I$, o qual existe por hipótese.

Para provar que f é Stieltjes integrável em $[a,b]$, será mostrado que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < \Delta P < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} - I \right| < \frac{\epsilon}{4}, \tag{4.11}$$

independentemente da escolha das marcas $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Fixe $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ com $\Delta P < \delta$ e tome $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de duas maneiras. Primeiramente, escolhe-se $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f(v_i) < m_i + \dfrac{\epsilon}{4n\Delta_{\alpha_i}}$, em que $m_i = \inf\{f(x) \colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, para cada $i = \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} < \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_{\alpha_i} + \frac{\epsilon}{4} = L(P, f, \alpha) + \frac{\epsilon}{4},$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} - \frac{\epsilon}{4} < L(P, f, \alpha). \tag{4.12}$$

Agora, escolhe-se $\overline{v_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f(\overline{v_i}) > M_i - \frac{\epsilon}{4n\Delta_{\alpha_i}}$, em que $M_i = \sup\{f(x) \colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, para cada $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{v_i})\Delta_{\alpha_i} > \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_{\alpha_i} - \frac{\epsilon}{4} = U(P, f, \alpha) - \frac{\epsilon}{4},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{v_i})\Delta_{\alpha_i} + \frac{\epsilon}{4} > U(P, f, \alpha). \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13), segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} - \frac{\epsilon}{4} < L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) < \sum_{i=1}^{n} f(\overline{v_i})\Delta_{\alpha_i} + \frac{\epsilon}{4}.$$

De (4.11), tem-se que $\sum\limits_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i}$ e $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{v_i})\Delta_{\alpha_i}$ estão no intervalo $\left(I - \frac{\epsilon}{4}, I + \frac{\epsilon}{4}\right)$. Logo, $L(P, f, \alpha)$ e $U(P, f, \alpha)$ pertencem ao intervalo $\left(I - \frac{\epsilon}{2}, I + \frac{\epsilon}{2}\right)$ e assim

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$$

e portanto, pelo Teorema 4.13, $f \in \Re(\alpha)$.

Agora, será provado a segunda afirmação. Dado $\epsilon > 0$ qualquer fixado, existe $\delta > 0$ tal que se $\Delta P < \delta$, então

$$I - \frac{\epsilon}{2} < S(P, f, \alpha) < I + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } P, \tag{4.14}$$

pela Definição 4.16 e pela propriedade de módulo. Sendo que $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ é uma partição de $[a, b]$ com $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ qualquer.

Agora, considere o sup e o inf do conjunto formado por $S(P, f, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i}$, sendo assim, pela definição de ínfimo e de supremo, pela Propriedade 3.2, pela Propriedade 3.3, pela Definição 4.2 e pela Definição 4.16, obtem-se:

$$L(P, f, \alpha) \leqslant S(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \tag{4.15}$$

Além disso,

$$L(P,f,\alpha) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant U(P,f,\alpha). \tag{4.16}$$

Subtraindo (4.15) e (4.16), donde ao somar (4.14) e pelo Teorema 4.13, conclui-se que:

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f d\alpha - I \right| < U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

logo como ϵ é arbitrário, conclui-se que

$$\int_a^b f d\alpha - I = 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f d\alpha = I,$$

ou seja, a segunda afirmação é válida.

■

Os três itens do teorema abaixo são alguns fatos intimamente relacionados ao Teorema 4.13.

Teorema 4.18.

(i) Se $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ vale para algum P e algum ϵ, então $U(Q,f,\alpha) - L(Q,f,\alpha) < \epsilon$ vale (com o mesmo ϵ) para todo refinamento Q de P.

(ii) Se $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ vale para $P = \{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ e, se s_i, v_i são pontos quaisquer em $[t_{i-1}, t_i]$, então $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(v_i)|\Delta_{\alpha_i} < \epsilon$.

(iii) Sejam f uma função Riemann-Stieltjes integrável em $[a,b]$ e $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ para alguma partição P e algum ϵ, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} - \int_a^b f d\alpha \right| < \epsilon.$$

Demonstração: **(i)** Seja Q um refinamento de P qualquer. Pelo Teorema 4.10 segue que:

$$U(Q,f,\alpha) - L(Q,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha).$$

Como, por hipótese, $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ para alguma partição P e algum ϵ. Então,

$$U(Q,f,\alpha) - L(Q,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon,$$

portanto,

$$U(Q, f, \alpha) - L(Q, f, \alpha) < \epsilon$$

para todo refinamento Q de P.

(ii) Por hipótese, $P = \{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ uma partição qualquer de modo que $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$ e s_i, v_i são pontos quaisquer em $[t_{i-1}, t_i]$.

Além disso, $f(s_i)$ e $f(v_i)$ pertencem ao intervalo $[m_i, M_i]$, pela definição de m_i, M_i da Definição 4.2, então, $|f(s_i) - f(v_i)| \leqslant M_i - m_i$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(v_i)| \, \Delta_{\alpha_i} \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha).$$

Além do que, por hipótese $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(v_i)| \, \Delta_{\alpha_i} < \epsilon.$$

(iii) Por hipótese, f é uma função Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$ e $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$ para alguma partição P e algum $\epsilon > 0$.

Pela definição de ínfimo, de supremo, de 4.2, de 4.3 e de 4.4, vale as seguintes desigualdades:

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} \leqslant U(P, f, \alpha) \tag{4.17}$$

e

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) \tag{4.18}$$

Subtraindo em (4.17) e em (4.18) $L(P, f, \alpha)$ e, por hipótese, segue que:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon \tag{4.19}$$

e

$$0 \leqslant \int_a^b f d\alpha - L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon. \tag{4.20}$$

Sendo assim, subtraindo (4.19) e (4.20), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - L(P, f, \alpha) - \left[\int_a^b f d\alpha - L(P, f, \alpha)\right] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - \int_a^b f d\alpha.$$

Desta última igualdade, de (4.19) e de (4.20), conclui-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - \int_a^b f d\alpha \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - \int_a^b f d\alpha\right| < \epsilon.$$

Portanto $\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{\alpha_i} - \int_a^b f d\alpha\right| < \epsilon.$ ■

Com os resultados desta seção, pode-se constatar que a integral de Stieltjes pode tanto ser definida por meio de somas superiores e inferiores, quanto por soma de Riemman, assim, é comum usar os nomes **Riemann-Stieltjes integrável** e **integral de Riemann-Stieltjes** nesse contexto.

4.3 Algumas classes de funções integráveis

Usando o critério de integrabilidade, é possível encontrar algumas classes de funções que são Stieltjes integráveis. Começando com o caso f contínua.

Teorema 4.19. Sejam $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real crescente e $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua em $[a,b]$, então $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Considere $\eta > 0$ de modo que $\eta < \frac{\epsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}$, observe que $\frac{\epsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)} > 0$, pois $\epsilon > 0$ e $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$, já que a função α é crescente, por hipótese.

Como f é contínua em um intervalo limitado e fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, por hipótese, então $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, pelo Teorema 3.13. Assim pelo Teorema 3.14 segue que f é uniformemente contínua em $[a,b]$, isto é, existe um $\delta > 0$, tal que para todo $z, w \in [a,b]$ com

$$|z - w| < \delta \ (*),$$

tem-se:

$$|f(z) - f(w)| < \eta. \tag{4.21}$$

Seja P uma partição de $[a,b]$, tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por $(*)$, e de (4.21), da hipótese de f contínua em um intervalo $[a,b]$ compacto, isto é, $M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = \max\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$ e $m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = \min\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$, segue que:

$$M_i - m_i \leqslant \eta \qquad (i - 1, \ldots, n).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \\ &\leqslant \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &< \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = \epsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.13 a última desigualdade vale e portanto, $f \in \Re(\alpha)$. ■

Lema 4.20. *Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua em $[a,b]$. Dado n inteiro positivo, existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ tal que $n \cdot \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$.*

Demonstração: O resultado é óbvio se $\alpha(b) = \alpha(a)$. Suponha então que $\alpha(a) < \alpha(b)$ e defina $r = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$. O conjunto de pontos $s_k = \alpha(a) + kr$, para $k = 0, \ldots, n$ pertencente ao intervalo $[\alpha(a), \alpha(b)]$. De fato, $\alpha(a) = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = \alpha(b)$. Do Teorema do Valor Intermediário, como α é contínua, existem pontos $t_k \in [a,b]$ para $k = 0, \ldots, n$ tais que $\alpha(t_k) = s_k$.

Claramente, pode-se escolher $t_0 = a$ e $t_n = b$. Ainda, como α é crescente, deve-se ter $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$. Note também que

$$\Delta_{\alpha_k} = \alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}) = s_k - s_{k-1} = (\alpha(a) + kr) - (\alpha(a) + (k-1)r) = r = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n},$$

isto é,

$$\Delta_{\alpha_k} = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \Leftarrow n \cdot \Delta_{\alpha_k} = \alpha(b) - \alpha(a),$$

o que conclui a demonstração do lema. ■

Teorema 4.21. Sejam $\alpha,\ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais mónotonas em $[a,b]$ Se α é contínua e crescente em $[a,b]$ então $f \in \Re(\alpha)$.

Demonstração: Como α é contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, então $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, pelo Teorema 3.13. Sendo assim, pelo Teorema 3.14, segue que α é uniformemente contínua em $[a,b]$.

Suponha que a função f é monótona crescente em $[a,b]$, ou seja, $f(b) \geqslant f(a)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se $b \geqslant a$. Entretanto, será suposto, sem perda de generalidade, que $f(b) > f(a)$, já que o caso da igualdade, ou seja, f constante, segue direto do Teorema 4.19.

Dados $\epsilon > 0$ e n inteiro positivo, considere, usando o Lema 4.20, uma partição P em $[a,b]$ de modo que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Como foi assumido que f é crescente, segue que

$$M_i = f(t_i), \quad m_i = f(t_{i-1}) \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(t_i)-f(t_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)] < \epsilon, \end{aligned}$$

portanto, pelo Teorema 4.13, segue que $f \in \Re(\alpha)$.

A prova é análoga para o caso em que a função f é decrescente. ■

Teorema 4.22. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, com um número finito de pontos de descontinuidade em $[a,b]$ e $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua para todo ponto no qual f é descontínua. Então $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$.

Demonstração: Seja $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset [a,b]$ o conjunto formado pelos pontos de descontinuidade de f com $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, o qual é finito, por hipótese.

Dado $\epsilon > 0$, escolha $\eta > 0$ tal que $\eta k < \frac{\epsilon}{4M}$, em que $M = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$, pois f é limitada, isto é, o conjunto imagem da função f é limitado, por hipótese, assim como o da função $|f(x)|$. Então pela propriedade do supremo, segue que o conjunto admite supremo.

Retire de $[a,b]$ os intervalos da forma $\left(x_i - \frac{\eta}{2}, x_i + \frac{\eta}{2}\right)$, $i \in 1, 2, \dots, k$ e considere $K \subset \mathbb{R}$ o conjunto restante, o qual é formado por no máximo $(k+1)-$intervalos fechados, sendo que a união finita de conjunto fechado é fechado (ver [2, Proposição 8]) e mais, $K \subset \mathbb{R}$ é limitado, já que tem uma quantidade finita de intervalos, logo é compacto, pelo Teorema 3.13. Logo, pelo Teorema 3.14, f é uniformemente contína, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}$, para todo $s, t \in K$, com

$$|s-t| < \delta(*).$$

Agora construa uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$ da seguinte maneira:

i) Todo $x_i - \frac{\eta}{2}, x_i + \frac{\eta}{2} \in P$;

ii) Nenhum ponto do intervalo $\left(x_i - \frac{\eta}{2}, x_i + \frac{\eta}{2}\right)_j \notin P$.

iii) Se t_{j-1} não é nenhum dos $x_i - \frac{\eta}{2}$, então $\Delta_{t_j} < \delta$, por $(*)$.

Assim, se t_{j-1} é diferente de $x_i - \frac{\eta}{2}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ então $M_j - m_j < \frac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}$, pois f é uniformemente contínua em K, isto é, $M_j = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = \max\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$ e $m_j = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\} = \min\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$.

Logo,

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \leqslant \sum_{t_{j-1} \neq x_i - \frac{eta}{2}}^{n} (M_j - m_j)\Delta_{\alpha_j} + \sum_{t_{j-1} = x_i - \frac{eta}{2}}^{n} (M_j - m_j)\Delta_{\alpha_j}$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}\cdot[\alpha(b)-\alpha(a)]+2M\eta k<\frac{\epsilon}{2}+2M\cdot\frac{\epsilon}{4M}=\epsilon.$$

Portanto, $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$ e pelo Teorema 4.13, $f\in\Re(\alpha)$. ∎

Teorema 4.23. Seja $f\in\Re(\alpha)$ em $[a,b]$ com $m\leqslant f\leqslant M$, $\phi:[m,M]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua em $[m,M]$ e $h(x)=\phi(f(x))$, para todo $x\in[a,b]$. Então $h\in\Re(\alpha)$ em $[a,b]$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade que ϕ não é identicamente nula em $[m,M]$. Seja $\epsilon>0$ qualquer. Por hipótese, ϕ é uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[m,M]$, o qual é um conjunto compacto, pelo Teorema 3.13. Donde pelo Teorema 3.14, tem-se que ϕ é uniformemente contínua em $[m,M]$. Assim, existe $\delta>0$ tal que $|\phi(w)-\phi(z)|<\epsilon$ se $|w-z|<\delta$ e $w,z\in[m,M]$. Disto, suponha, que $\delta<\frac{\epsilon\ [\alpha(b)-\alpha(a)]}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}$. Como $f\in\Re(\alpha)$, então existe uma partição $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ de $[a,b]$ de modo que

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\frac{\delta^2}{2K},$$

pelo Teorema 4.13, em que $K=\sup\{|\phi(z)|\colon z\in[m,M]\}$, o qual existe pelo Teorema de Weierstrass, pois ϕ é uniformemente contínua em $[m,M]$. Sejam $M_i^*, m_i{}^*$ números análogos a M_i, m_i da Definição 4.2 para h. Divida os números $1,2,\ldots,n$, os quais compõe os índices i anteriores, em duas classes:

$$\begin{cases} i\in A, & \text{se}\quad M_i-m_i<\delta,\\ i\in B, & \text{se}\quad M_i-m_i\geqslant\delta.\end{cases}\tag{4.22}$$

Para $i\in A:$ a escolha de δ mostra que $M_i^*-m_i^*\leqslant\frac{\epsilon}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}$, pois ϕ é uniformemente contínua em $[m,M]$ e $f\in\Re(\alpha)$ em $[a,b]$ com $m\leqslant f\leqslant M$, por hipótese.

Para $i\in B:$ $M_i^*-m_i^*\leqslant 2K$, que existe já que, por hipótese, ϕ é uniformemente contínua em $[m,M]$. Assim, e de (4.22), segue que:

$$\delta\sum_{i\in B}^{n}\Delta_{\alpha_i}\leqslant\sum_{i\in B}^{n}(M_i-m_i)\Delta_{\alpha_i}=U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\frac{\delta^2}{2K},$$

dividindo ambos os membros por $\delta>0$, tem-se que $\sum\limits_{i\in B}^{n}\Delta_{\alpha_i}<\frac{\delta}{2K}$.

Logo,

$$\begin{aligned} U(P,h,\alpha)-L(P,h,\alpha)&=\sum_{i\in A}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta_{\alpha_i}+\sum_{i\in B}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta_{\alpha_i}\\ &\leqslant\frac{\epsilon\ [\alpha(b)-\alpha(a)]}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}+2K\frac{\delta}{2K}=\frac{\epsilon\ [\alpha(b)-\alpha(a)]}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}+\delta\\ &<\frac{\epsilon\ [\alpha(b)-\alpha(a)]}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}+\frac{\epsilon}{[\alpha(b)-\alpha(a)]+1}=\epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.13, $h\in\Re(\alpha)$. ∎

4.4 Propriedades da Integral de Riemann-Stieltjes

As propriedades da Integral de Riemann-Stieltjes serão apresentadas a seguir.

Proposição 4.24. *Sejam $f_1,\ f_2 \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$, então, $f_1 + f_2 \in \Re(\alpha)$ e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$$

Demonstração: Por hipótese, $f_1,\ f_2 \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$. Defina $f = f_1 + f_2$ e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$ e $\epsilon > 0$. Sendo que $m_{if_1+f_2} \geqslant m_{if_1} + m_{if_2}$ e $M_{if_1+f_2} \leqslant M_{if_1} + M_{if_2}$. Então,

$$L(P, f, \alpha) \geqslant L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha)$$

e

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha).$$

Além do que, $f_1,\ f_2 \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$, então pelo Teorema 4.13 existem partições P_1 e P_2 de $[a,b]$ tal que

$$U(P_1, f_1, \alpha) - L(P_1, f_1, \alpha) < \epsilon \quad \text{e} \quad U(P_2, f_2, \alpha) - L(P_2, f_2, \alpha) < \epsilon.$$

Pelo Teorema 4.18 segue que isto vale para o refinamento P comum as partições P_1 e P_2, sendo assim:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon,$$

e logo, $f \in \Re(\alpha)$.

Agora será mostrado a segunda afirmação, a igualdade das integrais.

Com a mesma partição P, tem-se, pelo Teorema 4.12:

$$L(P, f_1, \alpha) \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha \leqslant U(P, f_1, \alpha), \tag{4.23}$$

e

$$L(P, f_2, \alpha) \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha \leqslant U(P, f_2, \alpha). \tag{4.24}$$

Então somando (4.23) e (4.24):

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \leqslant U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha).$$

Além disto, pelo fato de $f_1,\ f_2 \in \Re(\alpha)$, de (4.23), (4.24), da definição de ínfimo e de supremo, da Definição 4.2 e 4.3, segue que:

$$U(P, f_1, \alpha) \leqslant L(P, f_1, \alpha) + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.25}$$

e

$$U(P, f_2, \alpha) \leqslant L(P, f_2, \alpha) + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.26}$$

Logo, somando (4.25) e (4.26), pela Propriedade 3.4 e definição de ínfimo e supremo, obtêm-se as seguintes desigualdades:

$$\int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha - \epsilon \leqslant \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha$$

e

$$\int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + \epsilon \geqslant \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha.$$

Sendo assim, tem-se:

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f d\alpha - \left(\int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \right) \right| < \epsilon.$$

Portanto, como ϵ é arbitrário, conclui-se que

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

■

Proposição 4.25. *Seja $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ uma constante. Então $\gamma f \in \Re(\alpha)$ e*

$$\int_a^b \gamma f d\alpha = \gamma \int_a^b f d\alpha$$

Demonstração: Por hipótese, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ qualquer. Serão analisados três casos:

Se $\gamma = 0$: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon,$$

pelo Teorema 4.13. O resultado está demonstrado, pois $U(P, 0 \cdot f, \alpha) - L(P, 0 \cdot f, \alpha) = 0 \cdot U(P, f, \alpha) - 0 \cdot L(P, f, \alpha)$, pela Propriedade 3.3 e pela Definição 4.2. Logo,

$$0 \cdot [U(P, f, \alpha) - \cdot L(P, f, \alpha)] < 0 \cdot \epsilon,$$

ou seja, $0 \cdot f$ é integrável em $[a, b]$, pelo Teorema 4.13, e

$$\int_a^b 0 \cdot f d\alpha = 0 \cdot \int_a^b f d\alpha.$$

Se $\gamma > 0$: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \frac{\epsilon}{\gamma},$$

pelo Teorema 4.13. Além disso, pela Propriedade 3.3 e pela Definição 4.2, $\gamma \cdot U(P,f,\alpha) = U(P,\gamma \cdot f,\alpha)$ e $\gamma \cdot L(P,f,\alpha) = L(P,\gamma \cdot f,\alpha)$, ou seja, $U(P,\gamma \cdot f,\alpha) - L(P,\gamma \cdot f,\alpha) = \gamma \cdot U(P,f,\alpha) - \gamma \cdot L(P,f,\alpha)$. Sendo assim:

$$\gamma \cdot [U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)] < \gamma \cdot \frac{\epsilon}{\gamma} = \epsilon.$$

Logo, $\gamma \cdot f$ é integrável em $[a,b]$, pelo Teorema 4.13, quando $\gamma > 0$ e

$$\int_a^b \gamma \cdot f d\alpha = \gamma \cdot \int_a^b f d\alpha,$$

pela Propriedade 3.3, pela Definição 4.4 e 4.3.

Se $\gamma < 0$: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < -\frac{\epsilon}{\gamma},$$

pelo Teorema 4.13. Além disso, pela Propriedade 3.3 e pela Definição 4.2, $U(P,\gamma \cdot f,\alpha) = \gamma \cdot L(P,f,\alpha)$ e $L(P,\gamma \cdot f,\alpha) = \gamma \cdot U(P,f,\alpha)$, ou seja, $U(P,\gamma \cdot f,\alpha) - L(P,\gamma \cdot f,\alpha) = \gamma \cdot L(P,f,\alpha) - \gamma \cdot U(P,f,\alpha)$. Sendo assim:

$$-\gamma \cdot [U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)] < -\gamma \cdot -\frac{\epsilon}{\gamma} = \epsilon.$$

Logo, $\gamma \cdot f$ é integrável em $[a,b]$, pelo Teorema 4.13, quando $\gamma < 0$ e

$$\int_a^b \gamma \cdot f d\alpha = \gamma \cdot \int_a^b f d\alpha,$$

pela Propriedade 3.3, pela Definição 4.4 e 4.3.

■

Proposição 4.26. *Seja f_1, $f_2 \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ com $f_1 \leqslant f_2$. Então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

Demonstração: Por hipótese, f_1, $f_2 \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ com $f_1 \leqslant f_2$. Considere P uma partição de $[a,b]$. Como $f_1 \leqslant f_2$ e da definição de ínfimo e supremo, segue que $m_{if_1} \leqslant m_{if_2}$ e $M_{if_1} \leqslant M_{if_2}$, para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Além disso, $m_{(i+1)f_1} \geqslant m_{if_1}$, assim como $M_{i+1f_1} \geqslant M_{if_1}$ (análogo para a função f_2), logo $L(P,f_1,\alpha) \leqslant L(P,f_2,\alpha)$ e $U(P,f_1,\alpha) \leqslant U(P,f_2,\alpha)$.

Portanto, considerando o ínfimo da última desigualdade acima (o raciocínio é análogo para a desigualdade da soma inferior, pois $f \in \Re(\alpha)$), pela Definição 4.3 e pela hipótese de $f \in \Re(\alpha)$, conclui-se que $\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$. ■

Proposição 4.27. *Seja $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ e $a < c < b$, então $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,c]$ e em $[c,b]$ e Então*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

Demonstração: Considere $\epsilon > 0$ qualquer. Por hipótese, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$, logo pelo Teorema 4.13, existe uma partição P de $[a,b]$ de modo que $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$, e se pode supor, sem perda de generalidade, que c seja um ponto de P. Além disso, $a < c < b$, sendo assim, pode-se determinar as seguintes partições, $P_1 = P \cap [a,c]$ uma partição em $[a,c]$ e $P_2 = P \cap [c,b]$ uma partição em $[c,b]$, em que P_1 e P_2 são refinamentos da partição P, pela Definição 4.7. Logo, pelo Teorema 4.18, segue que

$$U(P_1,f,\alpha) - L(P_1,f,\alpha) < \epsilon \quad \text{e} \quad U(P_2,f,\alpha) - L(P_2,f,\alpha) < \epsilon,$$

donde pelo Teorema 4.13, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,c]$ e $f \in \Re(\alpha)$ em $[c,b]$.

Agora sejam $A = \{L(P_1,f,\alpha)\colon P_1 \text{ é uma partição de } [a,c]\}$ e $B = \{L(P_2,f,\alpha)\colon P_2 \text{ é uma partição de } [c,b]\}$, em que estes conjuntos são limitados, pois da hipótese de $f \in \Re(\alpha)$, segue que f é uma função limitada e assim o conjunto das somas inferiores de f é um conjunto limitado, então $A+B = \{L(P,f,\alpha)\colon P \text{ é uma partição de } [a,b] \text{ e } c \in (a,b)\}$, já que $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, pois $a < c < b$, ou seja, $P_1 \cup P_2 = P$ e é limitado, pois A e B são conjuntos limitados.

De $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,c], [c,b]$ e $[a,b]$, da Definição 4.3 e da Propriedade 3.2, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha &= \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \\ &= \overline{\int_a^c} f d\alpha + \overline{\int_c^b} f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha,\end{aligned}$$

portanto, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,c]$ e em $[c,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$ ■

Proposição 4.28. *Seja $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ com $|f(x)| \leqslant M$ em $[a,b]$ então*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

Demonstração: Por hipótese, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ e $|f(x)| \leqslant M$ em $[a,b]$, ou seja, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. Além disso, pelo Exemplo 4.5, tem-se que $g(x) = -M$ e $h(x) = M$ são Riemann-Stieltjes integráveis, para todo $x \in [a,b]$. Sendo assim, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, pela Propriedade 4.26, segue que

$$\int_a^b -M d\alpha \leqslant \int_a^b f(x) d\alpha \leqslant \int_a^b M d\alpha,$$

e assim, pela propriedade de módulo, obtem-se,

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha\right| \leqslant \int_a^b Md\alpha, \tag{4.27}$$

em que,

$$\int_a^b Md\alpha = \inf \sum_{i=1}^{n} M\Delta_{\alpha_i} = \inf M[\alpha(b) - \alpha(a)] = M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

substituindo a última igualdade em (4.27), tem-se que:

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha\right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

e assim conclui-se o resultado.

∎

Proposição 4.29. *Seja $f \in \Re(\alpha_1)$ e $f \in \Re(\alpha_2)$ em $[a, b]$, então $f \in \Re(\alpha_1 + \alpha_2)$ e*

$$\int_a^b fd(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b fd\alpha_1 + \int_a^b fd\alpha_2$$

Demonstração: Por hipótese, $f \in \Re(\alpha_1)$ e $f \in \Re(\alpha_2)$ em $[a, b]$, sendo assim, dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ qualquer, pelo Teorema 4.13, existe uma partição P de $[a, b]$, tal que:

$$U(P, f, \alpha_1) - L(P, f, \alpha_1) < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.28}$$

e

$$U(P, f, \alpha_2) - L(P, f, \alpha_2) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.29}$$

logo, somando (4.28) e (4.29), obtem-se:

$$U(P, f, \alpha_1 + \alpha_2) - L(P, f, \alpha_1 + \alpha_2) < \epsilon,$$

ou seja, $f \in \Re(\alpha_1 + \alpha_2)$, pelo Teorema 4.13 e assim o resultado está demonstrado.

∎

A propriedade acima garante que além de uma mesma função f real limitada em $\mathbb{R}$ ser Riemann-Stieltjes integrável em relação às funções alfas reais monótonas crescentes diferentes, a função f também é Riemann-Stieltjes integrável em relação a soma dessas alfas, e mais, é possível "separar" de maneira conveniente as alfas e o resultado se mantém.

Observe que nesta propriedade abaixo o número real positivo c é qualquer. No caso da integral de Riemann o $c \cdot \alpha(x) = \alpha(x) = 1 \cdot \alpha(x)$, ou seja, $c = 1$, como o número real um é elemento neutro no conjunto dos números reais, então a igualdade da integral de Riemann não é alterada, sendo que o mesmo ocorre na integral de Stieltjes mas agora com o c qualquer positivo.

Proposição 4.30. *Seja $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$ e c uma constante real positiva, então $f \in \Re(c\alpha)$ e*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$. Por hipótese, $f \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$, então pelo Teorema 4.13, existe uma partição P tal que

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \frac{\epsilon}{c}, \tag{4.30}$$

e por hipótese, tem-se também c uma constante real positiva.

Pela Definição 4.2 e pela Propriedade 3.3, obtem-se, $c \cdot U(P,f,\alpha) = U(P,cf,\alpha) = U(P,f,c\cdot\alpha)$, análogo para a soma inferior de f. Logo, multiplicando c por (4.30),

$$c \cdot U(P,f,\alpha) - c \cdot L(P,f,\alpha) < \epsilon \Rightarrow U(P,f,c\alpha) - L(P,f,c\alpha) < \epsilon,$$

portanto, pelo Teorema 4.13, $f \in \Re(c\alpha)$.

Agora, será mostrado que a igualdade em relação as integrais também é válida. Pela Definição 4.4, 4.3 e pela Propriedade 3.3, segue que,

$$\begin{aligned}\int_a^b f d(c\alpha) &= \inf\{U(P,f,c\alpha)\} = \inf\{c \cdot U(P,f,\alpha)\} \\ &= c \inf\{U(P,f,\alpha)\} = c \cdot \int_a^b f d\alpha.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.31. Se $f, g \in \Re(\alpha)$ em $[a,b]$, então:

(i) $fg \in \Re(\alpha)$

(ii) $|f| \in \Re(\alpha)$ e $\left|\int\limits_a^b f d\alpha\right| \leqslant \int\limits_a^b |f| d\alpha$

Demonstração: **(i)** Sejam $f, g \in \Re(\alpha)$. Pelas Propriedades 4.24 e 4.25 segue que as funções $(f+g)$ e $(f+(-1)g)$ são Riemann-Stieltjes integráveis. Além do que, considere a função contínua $\phi(t) = t^2$.Logo,

$$\phi[(f+g)] = (f+g)^2 \tag{4.31}$$

e

$$\phi[(f-g)] = (f-g)^2 \tag{4.32}$$

são Riemann-Stieltjes integráveis, pelo Teorema 4.23, o qual garante que a composição de uma função contínua com uma função Riemann-Stieltjes integrável é uma função Riemann-Stieltjes integrável. Donde ao subtrair (4.31) de (4.32), obtém-se:

$$(f+g)^2-(f-g)^2=(f+g)^2+[(-1)(f-g)^2]=f^2+2fg+g^2-(f^2-2fg+g^2)=4fg$$

Sendo assim, e pela Propriedade 4.24 $fg \in \Re(\alpha)$.

(ii) Por hipótese, $f \in \Re(\alpha)$. Então, considere a função contínua $\phi(x)=|x|$, para todo $x \in [a,b]$.

Pelo Teorema 4.23, tem-se que $|f(x)|=\phi(f(x))$ é Riemann-Stieltjes integrável, já que se tem uma função contínua, ϕ, composta por uma função, f integrável. Seja $\lambda \in \{-1,1\}$, tal que $\lambda \int_a^b f d\alpha \geqslant 0$. Como $|f| \geqslant \lambda f$, pela propriedade de módulo, para $\lambda \in \{-1,1\}$, tem-se

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| = \lambda \int_a^b f d\alpha = \int_a^b \lambda f d\alpha \leqslant \int_a^b |f| d\alpha,$$

onde se usa as Propriedade 4.25 e 4.26.

Portanto, $|f| \in \Re(\alpha)$ e $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha$. ∎

Note que o teorema acima não fornece o valor da integral do produto e do módulo das funções integráveis.

Definição 4.32. *A função* ***escada identidade*** *é definida por*

$$I(x)=\begin{cases} 0, & se \quad x \leqslant 0, \\ 1, & se \quad x > 0. \end{cases}$$

Os dois teoremas a seguir só valem para a integral de Stieltjes aplicados à uma função α apropriada.

Teorema 4.33. Se $a<p<b$, f é uma função limitada em $\mathbb{R}$, contínua em p e $\alpha(x) = I(x-p)$, então

$$\int_a^b f d\alpha = f(p).$$

Demonstração: Por hipótese a função f é contínua em p, então existe $\delta \in \mathbb{R}$ com $\delta = \min\{p-a, b-p\} > 0$, pois $p-a>0$ e $b-p>0$. Além do que, α é uma função crescente em $[a,b]$, pela Definição 4.32, sendo assim, pelo Teorema 4.19, segue que f é integrável com respeito a α em $[a,b]$. Considere a partição $P=\{a=t_0<p-\delta=t_1<p+\delta=t_2<b=t_3\}$ de $[a,b]$. Pela hipótese e pela Definição 4.32, temos:

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) &= M_1[\alpha(p-\delta)-\alpha(a)]+M_2[\alpha(p+\delta)-\alpha(p-\delta)]+M_3[\alpha(b)-\alpha(p+\delta)] \\ &= M_1[0]+M_2[1-0]+M_3[1-1]=M_2 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} L(P,f,\alpha) &= m_1[\alpha(p-\delta) + m_2[\alpha(p+\delta) - \alpha(p-\delta)] + m_3[\alpha(b) - \alpha(p+\delta)] \\ &= m_1[0] + m_2[1-0] + m_3[1-1] = m_2, \end{aligned}$$

onde $M_2 = \sup\{f(x) \ : \ x \in [p-\delta, p+\delta]\}$ e $m_2 = \inf\{f(x) \ : \ x \in [p-\delta, p+\delta]\}$.

Da continuidade de f em p, fazendo $\delta \to 0^+$, sabe-se que $M_2 \to f(p)$ e $m_2 \to f(p)$, e como $m_2 = L(P,f,\alpha) \leqslant \int_a^b f d\alpha \leqslant U(P,f,\alpha) = M_2$, pelo Teorema do Confronto, vê-se que

$$\int_a^b f d\alpha = f(p).$$

■

Este resultado mostra a diferença entre as integrais de Riemann-Stieltjes e de Riemann. Já que o valor da função em um único ponto não altera a integral de Riemann, porém aqui, para a função escada, o valor da função no ponto p determina precisamente o valor da integral.

Os dois teoremas posteriores ilustram a generalidade e flexibilidade inerente ao processo de integração de Stieltjes, pois se pode constatar que é possível, em muitos casos, estudar séries e integrais simultaneamente, em vez de separadamente. Donde, se α é uma função de passo puro (este é o nome frequentemente dado às funções α de 4.34), a integral se reduz a séries finitas ou infinitas (Teorema 4.34). Se α tem uma derivada integrável, a integral reduz-se a uma integral de Riemann (Teorema 4.35).

Teorema 4.34. Sejam $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência não negativa de números reais, tal que, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, f uma função contínua em $[a,b]$, $\{s_n\}$ uma sequência de pontos distintos em (a,b) e $\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot I(x-s_n)$. Então $\int\limits_a^b f d\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot f(s_n)$.

Demonstração: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $\{c_n\}$ uma sequência não negativa de números reais com $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ convergente. Pela Definição 4.32, segue que α é uma função crescente em $[a,b]$ e que $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, sendo assim, pelo Teorema 4.19, f é integrável com respeito a α em $[a,b]$.

Logo, pelo Teorema 4.13, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma partição P tal que $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Se existe um número inteiro positivo K_0 tal que se $K \geqslant K_0$ tem-se

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} c_n \leqslant \frac{\epsilon}{M(\alpha(b) - \alpha(a))}, \tag{4.33}$$

em que $M = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$ existe, pois $f \in \Re(\alpha)$, ou seja, f é limitada em $[a,b]$.

Então considere:

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{K} c_n \cdot I(x - s_n) \quad \text{e} \quad \alpha_2(x) = \sum_{n=K+1}^{\infty} c_n \cdot I(x - s_n),$$

as quais são funções crescentes pela hipótese e pela Definição 4.32, sendo assim, pelas Propriedades 4.30, 4.25 e pelo Teorema 4.33, segue que:

$$\int_a^b f d\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{K} c_n \cdot f(s_n).$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{n=K+1}^{\infty} c_n - 0 = \sum_{n=K+1}^{\infty} c_n$, de (4.33) e da Propriedade 4.28, obtém-se

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2(x) \right| < \epsilon.$$

Além disso, como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, então pela Propriedade 4.29, conclui-se que:

$$\left| \int_a^b f d\alpha(x) - \sum_{n=1}^{K} c_n \cdot f(s_n) \right| = \left| \int_a^b f d\alpha_2(x) \right| < \epsilon,$$

como ϵ é arbitrário, segue que $\int\limits_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot f(s_n)$. ∎

O teorema a seguir ilustra uma das situações em que integrais de Stieltjes se reduzem a integrais de Riemann.

Teorema 4.35. Sejam $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente em $[a, b]$, α' (derivada de α) Riemann integrável em $[a, b]$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real limitada em $[a, b]$. Então $f \in \Re(\alpha)$ se, e somente se, $f\alpha'$ é Riemann integrável. Além disso,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x) dx.$$

Demonstração: Suponha $f \in \Re(\alpha)$, ou seja, f é Riemann-Stieltjes integrável para toda função α crescente, em particular, f é Riemann-Stieltjes integrável para a função $\alpha(x) = x$, para todo $x \in [a, b]$, sendo assim f é Riemann integrável, além disso, por hipótese, α' Riemann integrável em $[a, b]$.

Logo, pelo Teorema 4.31 (restrito a integral de Riemann), segue que $f\alpha'$ é Riemann integrável.

Agora, suponha $f\alpha'$ é Riemann integrável e seja $\epsilon > 0$ qualquer.

Por hipótese, α é deferenciável em $[a, b]$, donde, por teorema, segue que α é contínua em $[a, b]$. Sendo assim, pelo Teorema Valor Médio, existe $s_i \in [t_{i-1}, t_i] \subseteq [a, b]$, tais que:

$$\alpha'(s_i) = \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_{t_i}}, \text{ com } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{4.34}$$

e disto, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(s_i)\Delta t_i. \tag{4.35}$$

Além disso, como $f\alpha'$ é Riemann integrável em $[a,b]$, pelo Teorema 4.13 (restrito a integral de Riemann) existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$U(P, f\alpha') - L(P, f\alpha') < \epsilon. \tag{4.36}$$

Logo, de (4.35), (4.36) e da Propriedade 3.2, obtem-se que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon,$$

ou seja, $f \in \Re(\alpha)$, pelo Teorema 4.13.

Por fim, será mostrado que a igualdade em relação as integrais vale. Considere $\epsilon > 0$ fixo e $M = \sup|f(x)|$, ou seja, $|f(x)| \leqslant M$, para todo $x \in [a,b]$, sendo que o supremo existe pela hipótese de f uma função real limitada em $[a,b]$, e α' Riemann integrável em $[a,b]$. Então pelo Teorema 4.13 (restringindo para $\alpha(x) = x$, ou seja, para integral de Riemann), existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ em $[a,b]$, tal que

$$U(P, \alpha') - L(P, \alpha') < \frac{\epsilon}{M}.$$

Pelo Teorema 4.18 (restrito a função $\alpha(x) = x$, ou seja, para integral de Riemann), para todo $v_i, s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), segue que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(v_i) - \alpha'(s_i)| \cdot \Delta t_i < \frac{\epsilon}{M}. \tag{4.37}$$

Além disso, de (4.34), obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(s_i)\Delta t_i$$

e assim, tem-se também que:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(v_i)\Delta_{t_i}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(s_i)\Delta_{t_i} - \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(v_i)\Delta_{t_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)[\alpha'(s_i) - \alpha'(v_i)]\Delta_{t_i}\right| \\
&= \left|f(v_1)[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta_{t_1} + \ldots + f(v_n)[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta_{t_n}\right|
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular, de $|f(x)| \leqslant M$, para todo $x \in [a, b]$, de $\Delta_{\alpha_i} \geqslant 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ assim como Δ_{t_i} e de (4.37), segue que

$$\begin{aligned}
&\Big|f(v_1)[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1 + \ldots + f(v_n)[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big| \\
&\leqslant \Big|f(v_1)[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1\Big| + \ldots + \Big|f(v_n)[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big| \\
&= \Big|f(v_1)\Big|\Big|[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1\Big| + \ldots + \Big|f(v_n)\Big|\Big|[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big| \\
&\leqslant M\Big|[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1\Big| + \ldots + M\Big|[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big| \\
&= M\Big[\Big|[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1\Big| + \ldots + \Big|[\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big|\Big] \\
&= M\Big|[\alpha'(s_1) - \alpha'(v_1)]\Delta t_1 + \ldots + [\alpha'(s_n) - \alpha'(v_n)]\Delta t_n\Big| \\
&= M\left|\sum_{i=1}^{n} [\alpha'(s_i) - \alpha'(v_i)]\Delta t_i\right| \\
&= M \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha'(v_i) - \alpha'(s_i)| \cdot \Delta t_i < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(v_i)\Delta t_i\right| < \epsilon, \tag{4.38}$$

para qualquer $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\quad i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, assim, por propriedade de módulo,

$$-\epsilon < \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\alpha'(v_i)\Delta t_i < \epsilon,$$

disto e da Definição 4.2 (restrita a integral de Riemann), segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta\alpha_i \leqslant U(P, f\alpha') + \epsilon,$$

para quaisquer escolhas de v_i em $[t_{i-1}, t_i]$. Assim

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f\alpha') + \epsilon.$$

De maneira análoga, obtem-se $U(P, f\alpha') \leqslant U(P, f, \alpha) + \epsilon$ e logo,

$$\Big|U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha')\Big| \leqslant \epsilon.$$

Note que a desigualdade acima continua verdadeira se P for substituído por algum refinamento, em que isto é garantido pelo Teorema 4.18. Por isto, pela definição de supremo e pela Definição 4.3, conclui-se que

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right| < \epsilon,$$

e como ϵ é arbitrário, segue que,

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx,$$

para toda função f limitada em $[a,b]$. A igualdade entre as integrais inferiores segue de (4.38), obtida de maneira análoga. Assim,

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx,$$

Portanto, combinando os resultados e pela Definição 4.4,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

■

Por mais que $\alpha(x)$ seja diferenciável para todo ponto do domínio, a sua derivada α' pode não ser Riemann integrável. Sendo assim, essa hipótese não pode ser retirada do Teorema 4.35.

Exemplo 4.36. *Seja $f(x) = x^2$, para $0 \leqslant x \leqslant 2$ uma função limitada e*

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & \text{para} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

uma função crescente em $[0,2]$.

Donde,

$$\alpha'(x) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & \text{para} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Logo

$$f(x)\alpha'(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3, & \text{para} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Além disso, pela Propriedade 4.19 e de α' uma função crescente em $[0,2]$, segue que f é Stieltjes e Riemann integrável em $[0,2]$, assim como $f(x)\alpha'(x)$, pela Propriedade 4.31. Logo, pelo Teorema 4.35,

$$\int_0^2 f(x)d(x) = \int_0^2 f(x)\cdot\alpha'(x)d(x) = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 x^3dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{49}{12}.$$

O teorema a seguir fornece condições para que se possa trocar de variáveis uma dada função Riemann-Stieltjes integrável, com o intuito de obter uma função mais simples para ser integrada.

Teorema 4.37. (Teorema de Mudança de Variável) Sejam $\varphi : [A, B] \longrightarrow [a, b]$ uma função contínua e estritamente crescente em $[A, B]$, $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona crescente em $[a, b]$ e $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$. Além do que sejam: $\beta\colon [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)) \qquad \text{e} \qquad g(y) = f(\varphi(y)), \quad \text{para todo } y \in [A, B].$$

Então, $g \in \Re(\beta)$ e

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha.$$

Demonstração: Por hipótese, $\varphi : [A, B] \longrightarrow [a, b]$ uma função contínua e estritamente crescente em $[A, B]$, sendo assim $\varphi([A, B]) = [a, b]$ e φ injetora, pelo Teorma de Weierstrass e da definição de função estritamente crescente, respectivamente. Donde φ é uma função bijetora e deste modo, existe uma partição correspondente $Q = \{A = y_1, y_2, \ldots, y_n = B\}$ de $[A, B]$, tal que $\varphi^{-1}(t_i) = y_i$.

Além do que, como por hipótese α é monótona crescente em $[a, b]$ e φ é crescente em $[A, B]$, em particular, é monótona crescente, então $\beta(y) = \alpha(\varphi(y))$ é uma função monótona crescente em $[A, B]$.

Além disso, por hipótese $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$, sendo assim, pelo Teorema 4.13, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon (*)$.

Pela Definição 4.2, pela lei de formação da função f, g e β (hipótese) e pela função φ bijetora, segue que

$$U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha) \qquad \text{e} \qquad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha),$$

logo, pelo Teorema 4.13 e por $(*)$, $g \in \Re(\beta)$ e também pelas igualdades acima, pela Definição 4.3 e 4.4, obtem-se que

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha.$$

Concluindo assim a demonstração.

∎

4.5 Integração e diferenciação

De maneira informal, pode-se afirmar que a integração e a diferenciação são operações inversas, em que estas operações em concomitante contemplam a maioria dos teoremas dessa seção.

Definição 4.38. *Sejam f, F funções reais quaisquer. Em que F é chamada de uma* ***antiderivada*** *ou* ***primitiva*** *de f se $F'(x) = f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f.*

Lembrando aqui que, do Teorema do Valor Médio, se F_1 e F_2 são duas antiderivadas de f num intervalo $[a, b]$ então F_1 e F_2 diferem apenas por uma constante, já que $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$.

A menos que se diga o contrário, será denotado por $\Re$ o conjunto $\Re(\alpha)$, onde $\alpha(x) = x$.

Teorema 4.39. (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $f \in \Re$ contínua em um ponto $x_0 \in [a, b]$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, para $a \leqslant x \leqslant b$, é dada por $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Então F é contínua em $[a, b]$, diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstração: Primeiramente será provado que a função F é contínua em $[a, b]$. Seja $c \in [a, b]$ qualquer e $\epsilon > 0$ qualquer. Assuma $h > 0$ e adimita que $c + h \in [a, b]$. Pela definição da F e pelo Teorema 4.27, tem-se

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \\ &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^{c+h} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \\ &= \int_a^{c+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Existe $\delta > 0$ tal que $|(c + h) - c| = |h| = h < \frac{\epsilon}{M} = \delta$ $(M = \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\})$ de modo que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_a^{c+h} f(t)dt \right| \leqslant M[(c+h) - a] < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

pelo fato de $c \in [a, b]$ qualquer e pelo Teorema 4.31. Logo, a função F é contínua em $[a, b]$.

Para encontrar a derivada da função F será determinado as derivadas laterais de F no ponto c. Inicialmente será mostrado que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

A função f é contínua em $[c, c + h]$, então pelo Teorema de Weierstrass existem $x_1, x_2 \in [c, c + h]$ tais que $f(x_1) \leqslant f(t) \leqslant f(x_2)$, para todo $t \in [c, c + h]$.

Logo,

$$f(x_1)h \leqslant \int_c^{c+h} f(t)dt \leqslant f(x_2)h.$$

Como $h > 0$ e $\int\limits_c^{c+h} f(t)dt = F(c+h) - F(c)$, tem-se

$$f(x_1) \leqslant \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leqslant f(x_2). \tag{4.39}$$

Note que se $h \to 0^+$ então $x_1 \to c^+$ e $x_2 \to c^+$, pois x_1 e x_2 estão entre c e $c + h$. Da continuidade de f se pode escrever

$$\lim_{h \to 0^+} f(x_1) = \lim_{x_1 \to c^+} f(x_1) = f(c)$$

e

$$\lim_{h \to 0^+} f(x_2) = \lim_{x_2 \to c^+} f(x_2) = f(c).$$

Fazendo $h \to 0^+$ em (4.39) e pelo Teorema do Confronto, obtem-se

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c),$$

ou seja, para $c \in [a, b)$, tem-se ${F_+}'(c)$ existe e ${F_+}'(c) = f(c)$.

De forma análoga, mostra-se que $F'_-(c) = f(c)$ para $c \in (a, b]$ e portanto se conclui que $F'(c) = f(c)$.

Finalizando assim a demonstração. ∎

Exemplo 4.40. *Considere a seguinte integral*

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t \cdot sen^2(t)}dt,$$

em que $f(t) = \sqrt{1 + e^t \cdot sen^2(t)}$, *para todo* $t \in [0, \infty)$ *é contínua. Logo, pelo Teorema 4.39, a derivada de* $F(x)$ *é* $F'(x) = f(x) = \sqrt{1 + e^x \cdot sen^2(x)}$

Até o momento foram apresentados apenas resultados referente às condições de integrabilidade e não ao cálculo de integrais, donde com as ferramentes tidas até agora é algo extremamente trabalhoso de se fazer, e muitas vezes impossível, calcular precisamente o valor de uma dada integral. No entanto, por meio do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se uma maneira de calcular integrais de Riemann. Entretanto, existem outros métodos numéricos para calcular integrais, os quais não serão explorados nessa monografia.

Teorema 4.41. (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $f \in \Re$ e F diferenciável em $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Por hipótese, $f \in \Re$ em $[a,b]$, pelo Teorema 4.18, segue que existe uma partição P qualquer de $[a,b]$ de modo que se $v_i \in [x_i, x_{i-1}]$, tem-se que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{x_i} - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon.$$

Além disso, F é um função contínua em $[a,b]$, pois por hipótese F é diferenciável em $[a,b]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio e pela hipótese de $F'(x) = f(x)$, segue que existe $v_i \in (x_i, x_{i-1})$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(v_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)\Delta_{x_i}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(b) - F(a).$$

Logo,

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_{x_i} - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon.$$

Portanto, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

■

Exemplo 4.42. *Pelo Teorema 4.41,*

$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx = [-cos(2\pi)] - [-cos(0)] = (-1) - (-1) = 0,$$

em que $-cos(x)$ é uma antiderivada de $sen(x)$.

Teorema 4.43 (Integração por partes)**.** Sejam F e G funções diferenciáveis em $[a,b]$, $F' = f \in \Re$ e $G' = g \in \Re$. Então

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Demonstração: Considere uma função $H(x) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x) = F(x)G(x)$ para todo $x \in [a,b]$, a qual é contínua em $[a,b]$, pois por hipótese F, G são diferenciáveis. Donde, pelos Teoremas 4.19 e 4.31, segue que $H \in \Re$ em $[a,b]$. Sendo assim, pela hipótese de $F', G' \in \Re$ e pelas Propriedades 4.24 e 4.31 (restringindo a integral de Riemann, $\alpha(x) = x$)), segue que $H' \in \Re$. Além disso, pelo Teorema 4.41, obtem-se que

$$\int_a^b H'(x)dx = H(b) - H(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Logo, pela Propriedade 4.24, tem-se

$$\begin{aligned} F(b)G(b) - F(a)G(a) &= \int_a^b H'(x)dx \\ &= \int_a^b [F'(x)G(x) + F(x)G'(x)]dx \\ &= \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Portanto, $\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int\limits_a^b f(x)G(x)$.

■

A seguir consta um resultado válido para integrais de Stieltjes.

Teorema 4.44. (Teorema do Valor Médio) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real contínua $[a, b]$ e α uma função real monótona crescente em $[a, b]$, então existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Demonstração: Se $\alpha(b) = \alpha(a)$, nada precisa ser demonstrado. Assuma então que $\alpha(a) < \alpha(b)$. Pelo Teorema 4.19, sabe-se que $f \in \Re(\alpha)$.

Sejam $M = \sup\{f(t) \colon t \in [a, b]\} = \max\{f(t) \colon t \in [a, b]\}$ e $m = \inf\{f(t) \colon t \in [a, b]\} = \min\{f(t) \colon t \in [a, b]\}$, os quais existem pelo Teorema de Weierstrass, pois por hipótese f é uma função contínua em $[a, b]$. Logo, pelo Teorema 4.28 e de recorrências da Definição 4.4, obtem-se que:

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Assim, se $d = \frac{\int_a^b f(x)d\alpha(x)}{\alpha(b)-\alpha(a)}$, tem-se que $d \in [m, M]$ e pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$, ou seja,

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)d\alpha(x)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \Rightarrow \int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

provando assim o resultado.

■

Conclui-se que a integral de Riemann-Stieltjes é uma generalização da integral de Riemann. Percebe-se também, que há a possibilidade de transferir alguns teoremas aplicados à integral de Riemann para esta.

Conclusão: O tipo de integração abordado nesta monografia é uma teoria mais geral do que o que é estudado em cursos de Cálculo na graduação, e essa generalização se torna significativamente útil em certas aplicações, como em Análise Funcional e Estatística.

5 Aplicações da Integral de Riemann-Stieltjes

Neste capítulo serão apresentados brevemente alguns resultados que utilizam a teoria da integral de Riemann-Stieltjes. Mais resultados referentes à aplicações nas áreas de Estatística e Análise Funcional não constam nesta monografia, entretanto o aprofundamento nestes conceitos fica a cargo do leitor, que pode buscar referências como [3] e [5].

A integral de Riemann-Stieltjes aparece na formulação do teorema espectral para operadores em um espaço de Hilbert. Neste teorema, a integral é considerada em relação a uma família espectral de projeções e também é uma ferramenta importantíssima para unificar formas equivalentes de teoremas estatísticos que se aplicam a probabilidade discreta e contínua, mais precisamente no estudo do valor esperado de uma variável aleatória, no sentido em que se pode unificar as expressões do valor esperado para diversos tipos de variáveis. Assim, como a integral de Riemann-Stieltjes aparece na formulação original do teorema de Frigyes Riesz que representa o espaço dual do espaço de Banach $C[a, b]$ de funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ como integrais de Riemann-Stieltjes mediante à funções de variação limitada.

5.1 Desigualdade de Hölder

Nesta seção será mostrada a *desigualdade de Hölder*, sendo que para isto é preciso de dois resultados, os quais suas provas constam a seguir. Sejam p e q números reais positivos tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.1}$$

Claramente, desta hipótese para p e q segue que $p, q > 1$.

Lema 5.1 (Desigualdade de Young). *Se $u \geqslant 0$ e $v \geqslant 0$, então*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \tag{5.2}$$

A igualdade é válida se e somente se $u^p = v^q$.

Demonstração: Se $v = 0$, a desigualdade é trivial. Pode-se supor então que $v > 0$. Assim, dividindo (5.2) por $v^q > 0$, obtém-se a desigualdade

$$\frac{u}{v^{q-1}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{u^p}{v^q} + \frac{1}{q},$$

que é equivalente à (5.2). Se $t = \frac{u^p}{v^q} \geqslant 0$, note que

$$t^{1/p} = \frac{u}{v^{q/p}} = \frac{u}{v^{q-1}},$$

pois $\frac{q}{p} = \frac{q-1}{p}$. Assim, obtém-se a desigualdade equivalente

$$t^{1/p} \leqslant \frac{1}{p}t + \frac{1}{q} \text{ para } t \geqslant 0.$$

Defina a função $\varphi\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = t^{1/p} - \frac{1}{p}t - \frac{1}{q}$, e será mostrado que $\varphi(t) \leqslant 0$ para todo $t \geqslant 0$. Note que para $t > 0$, φ é diferenciável e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(t^{-1/q} - 1) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{t^{1/q}} - 1\right) \text{ para todo } t > 0,$$

onde se usa que $\frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}$. Desta maneira obtém:

- se $0 < t < 1$ então $\varphi'(t) > 0$,
- $\varphi'(1) = 0$,
- se $t > 1$ então $\varphi'(t) < 0$.

Assim, φ tem um ponto de máximo em $t = 1$, e como $\varphi(0) = -\frac{1}{q} < 0 = \varphi(1)$, tem-se $t = 1$ um ponto de máximo global de φ, o que mostra que $\varphi(t) \leqslant \varphi(1) = 0$ para todo $t \geqslant 0$, e o resultado segue tomando $t = \frac{u^p}{v^q}$. Claramente, a igualdade é válida se e só se $t = 1$, isto é, se e só se $u^p = v^q$.

■

Para $p > 1$ e $f \in \Re(\alpha)$ defina

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p d\alpha\right)^{1/p}.$$

Note que, com essa notação, tem-se $\|f\|_1 = \int_a^b |f| d\alpha$.

Com isto, tem-se o seguinte resultado:

Lema 5.2 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $f, g \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$ e p, q satisfazendo* (5.1)*, então*

$$\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q.$$

Demonstração: Usando a Desigualdade de Young para $u = |f(x)|$ e $v = |g(x)|$ e pela propriedade de módulo se tem

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q,$$

integrando ambos os membros da desigualdade, o que é possível pela Propriedade 4.25 e pelo Teorema 4.31, e elevando ambos os membros da igualdade da definição acima por p, prova-se o resultado. ■

Agora sim, será provada a desigualdade de Hölder.

Teorema 5.3 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam f, g, p, q como no Lema 5.2. Então

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Seja $\gamma > 0$ qualquer. Aplicando a Desigualdade de Minkowski para $\gamma^{(p-1)/p} f = \gamma^{1/q} f$ e $\gamma^{-1/q} g$ no lugar de f e g, respectivamente, obtem-se

$$\|fg\|_1 \leqslant \frac{\gamma^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\gamma} \|g\|_q^q, \tag{5.3}$$

pois $fg = (\gamma^{1/q} f)(\gamma^{-1/q} g)$.

Logo, tomando $\gamma = \frac{\|g\|_q^{q/p}}{\|f\|_p}$ se tem $\gamma^{p-1} = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{(p-1)}}$ e $\frac{1}{\gamma} = \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q/p}}$, o que fornece

$$\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p} \|f\|_p \|g\|_q + \frac{1}{q} \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q,$$

e se completa a demonstração. ■

Note que o que foi feito funciona somente se $\|f\|_p \neq 0$. Se esse for o caso, basta inverter a ordem de γ em (5.3). Além disso, a escolha de γ é encontrada simplesmente minimizando a função que aparece do lado direito de (5.3).

Deve-se ressaltar que quando $p = q = 2$, a desigualdade de Hölder tamém recebe o nome de *Desigualdade de Schwarz.*

5.2 Dual do espaço das funções contínuas

Nesta seção, será apresentado rapidamente e sem todo o rigor matemático necessário, um resultado de caracterização do conjunto dual das funções contínuas. Os requisitos necessários e as demonstrações completas do que é exposto aqui podem ser encontrados em [5].

O conceito que segue é um tópico de interesse geométrico que fornece uma aplicação de alguns dos conceitos apresentados anteriormente.

Definição 5.4. *Uma função $\lambda \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua em $[a,b]$ é chamada de* ***curva parametrizada em*** R^n *. Em que se diz ainda:*

(i) *λ é um* ***arco*** *se λ é injetora;*

(ii) *λ é uma* ***curva fechada*** *se $\lambda(a) = \lambda(b)$ e $\lambda|_{(a,b)}$ é injetora.*

Deve-se notar que uma curva é uma função, e não um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^n$. Denota-se por $tr(\lambda)$ o conjunto imagem de λ em $\mathbb{R}^n$, isto é $tr(\lambda) = \lambda([a,b])$, o qual se chama de **traço** de λ. Em geral, quando se diz curva, pode-se confundir com o traço, mas vale lembrar que curvas diferentes podem ter o mesmo traço.

Sejam $\lambda\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva em e $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Define-se:

$$\Lambda(P,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})|,$$

que é chamada de **variação de λ em P**.

O i-ésimo termo nesta soma é a distância entre os pontos $\lambda(t_{i-1})$ e $\lambda(t_i)$. Portanto, o número real não negativo $\Lambda(P,\lambda)$ é o comprimento de uma poligonal com vértices em $\lambda(t_0)$, $\lambda(t_1)$, $\ldots$,$\lambda(t_n)$, nesta ordem. À medida que nossa partição torna-se mais fina, quanto maior o número de pontos da partição P, mais perto este polígono ficará do valor do comprimento do traço da curva λ. Sendo assim, parece razoável definir o **comprimento de λ** por

$$\Lambda(\lambda) = \sup\{\Lambda(P,\lambda)\colon\ P \text{ partição de } [a,b]\},$$

que é também chamado de **variação de λ**. Se $\Lambda(\lambda)$ é finito, diz-se que λ é **retificável** ou também que λ é de **variação limitada**.

Nos casos aonde λ é diferenciável com derivada contínua, $\Lambda(\lambda)$ é dada por uma integral de Riemann, como se verá no resultado abaixo.

Teorema 5.5. Seja $\lambda : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^n$ e diferenciável em $[a,b]$, com λ' contínua em $[a,b]$, então λ é retificável e

$$\Lambda(\lambda) = \int_a^b |\lambda'(t)|dt.$$

Demonstração: Por hipótese, λ diferenciável em $[a,b]$ e λ' é contínua em $[a,b]$, então pelo Teorema 4.19 (restrito a integral de Riemann), segue λ' é integrável.

Logo, pelo Teorema 4.41 considerando em módulo, segue que:

$$|\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda'(u)du \right| \tag{5.4}$$

quando $a \leqslant t_{i-1} < t_i \leqslant b$.

Além disso, pelo Teorema 4.31, $\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda'(u)du\right| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\lambda'(u)|du$ para qualquer partição P de $[a,b]$. Sendo assim, $\Lambda(P,\lambda) \leqslant \int_a^b |\lambda'(u)|du$.

Consequentemente tomando o supremo da desigualdade acima, segue que

$$\Lambda(\lambda) \leqslant \int_a^b |\lambda'(u)|du. \tag{5.5}$$

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, como λ' é contínua em $[a,b]$ (o qual é compacto, pelo Teorema 3.13), por hipótese, assim pelo Teorema 3.14, segue que λ' é uniformemente contínua em

$[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, t \in [a,b]$ $|\lambda'(u) - \lambda'(t)| < \epsilon$ se $|u-t| < \delta$. Seja P uma partição de $[a,b]$ cuja amplitude máxima é menor do que δ (Δ_{t_i}). Se $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, tem-se que

$$|\lambda'(t)| \leqslant |\lambda'(t_i)| + \epsilon,$$

de modo que, de (5.4), da última desigualdade acima, da Desigualdade Triangular e do Teorema 4.31,

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\lambda'(t)|dt &\leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\lambda'(t_i)| + \epsilon \ dt = |\lambda'(t_i)|\Delta_{t_i} + \epsilon\Delta_{t_i} \\
&= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\lambda'(t) + \lambda'(t_i) - \lambda'(t)]dt \right| + \epsilon\Delta_{t_i} \\
&\leqslant \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\lambda'(t)dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\lambda'(t_i) - \lambda'(t)dt \right| + \epsilon\Delta_{t_i} \\
&\leqslant |\lambda'(t_i) - \lambda'(t_{i-1})| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\lambda'(t_i) - \lambda'(t)dt \right| + \epsilon\Delta_{t_i} \\
&< |\lambda'(t_i) - \lambda'(t_{i-1})| + \epsilon\Delta_{t_i} + \epsilon\Delta_{t_i} \\
&= |\lambda'(t_i) - \lambda'(t_{i-1})| + 2\epsilon\Delta_{t_i}.
\end{aligned}$$

Logo, da soma dos $i = 1, 2, \ldots, n$, da Definição 5.4, especificamente, definição de $\Lambda(\lambda)$, e da definição de supremo, obtem-se:

$$\int_a^b |\lambda'(t)|dt \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda'(t_i) - \lambda'(t_{i-1})| + 2\epsilon(b-a) = \Lambda(P,\lambda) + 2\epsilon(b-a) \leqslant \Lambda(\lambda) + 2\epsilon(b-a),$$

portanto, como $\epsilon > 0$ arbitrário e de (5.5), segue-se que $\int_a^b |\lambda'(u)|du = \Lambda(\lambda)$ e λ é retificável, pela Definição 4.4 (restrita a integral de Riemann).

Concluindo assim o resultado.

■

Pode-se definir a integral de Stieltjes em $\mathbb{R}^n$, como na Definição 4.16, usando curvas retificáveis λ no lugar de funções crescentes α. Isto é, define-se

$$S(P, f, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})),$$

para cada partição P marcada, onde $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i = 1, ..., n$.

Se existe o limite

$$\lim_{\Delta P \to 0} S(P, f, \lambda) = I \in \mathbb{R}^n,$$

diz-se que a função f é **Riemann-Stieltjes integrável**.

Esta integral tem muitas propriedades análogas à integral de Riemann-Stieltjes em $\mathbb{R}$ usando funções crescentes (que são casos particulares de curvas retificáveis) e com esta integral se pode apresentar uma caracterização para o espaço dual das funções contínuas.

Antes disso, só serão expostas algumas definições. Seja $C([a,b],\mathbb{R})$ o conjunto das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas. O **espaço dual** de $C([a,b],\mathbb{R})$ é o conjunto de funcionais lineares contínuos $\Psi\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, isto é,

1) $\Psi(f+g) = \Psi(f) + \Psi(g)$, para todas $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$;

2) $\Psi(cf) = c\Psi(f)$, para toda $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$;

3) existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup|_{x\in[a,b]}\Psi(f)(x)| \leqslant M \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \text{ para toda } f \in C([a,b],\mathbb{R}).$$

Com isto será apresentado o último resultado. Para a demonstração, veja [5].

Teorema 5.6. Tem-se o seguinte:

1. Se $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma curva retificável, então a função $\Psi_\alpha\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(f) = \int_a^b f d\alpha \text{ para cada } f \in C([a,b],\mathbb{R}),$$

define um funcional linear contínuo em $C([a,b],\mathbb{R})$.

2. Reciprocamente, dado um funcional linear contínuo $\Psi\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, existe uma curva retificável $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi = \Psi_\alpha$, isto é,

$$\Psi(f) = \int_a^b f d\alpha \text{ para toda } f \in C([a,b],\mathbb{R}).$$

A demonstração de (1) é bastante simples, e utiliza simplesmente as propriedades de integral de Riemann-Stieltjes para o caso de curvas retificáveis. Já a demonstração de (2) é bastante complicada e requer uma construção da curva α, que é feita à partir de combinação linear de funções características.

Referências

BOYER, Carl B. *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher, (2012). Citado na página 19.

LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. 4. ed, Rio de Janeiro: IMPA, (2009). Citado 2 vezes nas páginas 32 e 53.

MANÇO, Rafael de Freitas. Integrais e aplicações. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, (2016). Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-30112016-154343/es.php>. Acesso em: 19 jul. 2017. Citado na página 73.

Math.I. <http://www.apprendre-math.info/tagalog/historyDetail.htm?id=Stieltjes>. Acesso em: 31 jun. 2017. Citado na página 19.

RIESZ, Frigyes; NAGY, Béla SZ. *Functional Analysis*. Hungria: Universidades de Budapeste e Szeged, (1956). Traduzido a partir da segunda edição francesa por Leo F. Boron. Citado 3 vezes nas páginas 73, 75 e 78.

RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*, 3ª ed., McGraw-Hill Inc. (1976). Citado na página 34.

SANTOS, Leandro Nunes dos. *As Integrais de Riemann, Riemann-Stieltjes e Lebesgue*. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, (2013). Citado na página 19.

STIELTJES, Thomas Joannes. Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **VIII: 1-122** (1894). Citado na página 17.